Ecole Normale Supérieure Paris Année 2014-2015
Algèbre 1

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/90\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 2 Montrer qu'un groupe abélien fini non-cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 3 Combien de groupes abéliens de cardinal 360 y a-t-il ?

Exercice 4 Le nombre de classes de conjugaison dans $\mathscr{S}_5$ est le même que le nombre de groupes non-isomorphes de cardinal 32. Pourquoi ?

Exercice 5 Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre l'*exposant de* G (c'est-à-dire, d'ordre le ppcm des ordres des éléments de G).

Exercice 6 Soient G un groupe et H, K des sous-groupes de G. On suppose que :

1. $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft G$.
2. $HK = G$.
3. $H \cap K = e$.

Montrer que G est isomorphe à $H \times K$.

Exercice 7 Soit K un corps fini de cardinal q. On va montrer que K^* est un groupe cyclique.

1. Montrer que l'ordre de tout élément de K^* divise $n = q - 1$.
2. Supposons qu'il existe un élément $x \in K^*$ d'ordre d, un diviseur de n. Soit H le sous-groupe cyclique de K^* engendré par x. Montrer que tout élément d'ordre d est dans H
3. Montrer que le nombre d'éléments $N(d)$ de K^* d'ordre d vaut 0 ou $\varphi(d)$. Déduire que $\sum_{d|n,d>0} N(d) = n$.
4. Conclure.

En particulier, si p est un nombre premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

Exercice 8 (Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

a) Soit G un groupe monogène. Montrer que le groupe des automorphismes de G est en bijection avec l'ensemble des générateurs de G.

b) Soient p un nombre premier impair et $\alpha \geq 1$. Quel est l'ordre de $1+p$ dans $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$? En déduire $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$.

c) Expliciter $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$ pour $\alpha \geq 1$.

d) En déduire $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Exercice 10 Décomposer le groupe $G = (\mathbb{Z}/187\mathbb{Z})^\times$ sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

Exercice 11 Soit $n \geq 1$. Constuire dans $\mathbb{R}$ un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 12 Soit $G = \mathbb{Z}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer que tout système libre maximal est de cardinal n. Donner un exemple où un tel système n'est pas une base.

Exercice 13 Soit $e_1 = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur tel que le pgcd de ses coordonnées vaut 1. Montrer que l'on peut compléter e_1 en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 14 Soit G un groupe abélien de type fini, et soit $f : G \to G$ un morphisme surjectif. Montrer que f est un isomorphisme. Ceci est-il nécessairement vrai si l'on remplace surjectif par injectif ?

Exercice 15 Soit $n \geq 1$. On note $\mathrm{Int}(\mathscr{S}_n)$ le sous-groupe des automorphismes intérieurs de $\mathrm{Aut}(\mathscr{S}_n)$.

1. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_n)$ tel que ϕ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que ϕ est intérieur.

2. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Déterminer le cardinal du commutant $Z(\sigma) := \{s \in \mathscr{S}_n \mid s\sigma s^{-1} = \sigma\ \}$ de σ.

3. En déduire que, si $n \neq 6$, alors $\mathrm{Int}(\mathscr{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_n)$.

4. Soit $n \geq 5$ tel que $\mathrm{Int}(\mathscr{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_n)$. Montrer que tous les sous-groupes d'indice n de S_n sont conjugués.

5. En utilisant les 5-Sylow de $\mathscr{S}_5$, montrer qu'il existe un sous-groupe H d'indice 6 de S_6 opérant transitivement sur $\{1, \ldots, 6\}$.

6. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathscr{S}_6) \neq \mathrm{Int}(\mathscr{S}_6)$.

Simplicité de $\mathscr{A}_5$

> *Le plus petit nombre de permutations que puisse avoir un groupe indécomposable quand ce nombre n'est pas premier est* 5.4.3.
>
> Évariste Galois, dans sa dernière lettre

Exercice 16 Simplicité de $\mathscr{A}_5$. Supposons qu'il existe H un sous-groupe distingué non-trivial de $\mathscr{A}_n$.

1. Montrer que les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans $\mathscr{A}_5$.

2. Montrer que si H contient un 5-cycle, il les contient tous.

3. En déduire que $\mathscr{A}_5$ est simple.

Exercice 17 Simplicité de $\mathscr{A}_n$.

1. Montrer que $\mathscr{A}_n$ contient tous les 3-cycles.

2. Montrer que $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles $(12k)$ pour $k > 2$.

Supposons qu'il existe $H \lhd \mathscr{A}_n$ un sous-groupe distingué non-trivial.

3. Montrer que, si H contient un 3-cycle, il les contient tous.

4. Montrer que H contient un 3-cycle et conclure.