Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Feuille d'exercices 4

Autour du produit semi-direct

Exercice 1 Soient G un groupe et H et K deux sous-groupes de G tels que $H \cap K = \{e\}$, $HK = G$ et $H \triangleleft G$. Montrer que :

1. L'application $i : K \to \mathrm{Aut}(H)$ définie par $k \mapsto i_k$, où $i_k(h) = khk^{-1}$, est un homomorphisme de groupes.
2. La loi de composition $(h_1, k_1) \rtimes (h_2, k_2) = (h_1 i_{k_1}(h_2), k_1 k_2)$ donne à l'ensemble produit $H \times K$ une structure de groupe, noté $H \rtimes K$.
3. L'application :

$$\begin{array}{rcl} f : H \rtimes K & \to & G \\ (h,k) & \mapsto & hk \end{array}$$

   est un isomorphisme de groupes.

On dit alors que G est le produit semi-direct de K par H.

Exercice 2 Soient H et K deux groupes et supposons qu'on dispose d'un morphisme de groupes $\phi : K \to \mathrm{Aut}(H)$. Notons $H \underset{\phi}{\rtimes} K$ l'ensemble $H \times K$ muni de la loi de composition définie par $(h_1, k_1) \underset{\phi}{\rtimes} (h_2, k_2) = (h_1 \phi(k_1)(h_2), k_1 k_2)$.
Montrer que $H \underset{\phi}{\rtimes} K$ est un groupe tel que $H \times \{e_K\} \triangleleft H \underset{\phi}{\rtimes} K$ et $\{e_H\} \times K < H \underset{\phi}{\rtimes} K$.

Exercice 3 Le produit semi-direct $H \underset{\phi}{\rtimes} K$ est direct si, et seulement si, ϕ est le morphisme trivial.

Exercice 4 Soient $G = N \rtimes H$ et K un sous-groupe de G contenant N. Montrer que l'on a $K = N \rtimes (K \cap H)$.

Exercice 5 Soient k un corps et $n \geq 1$ un entier. Prouver que la suite exacte du déterminant

$$1 \to \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{GL}_n(k) \to k^\times \to 1$$

est scindée. Montrer que $\mathrm{GL}_n(k)$ peut sécrire comme un produit direct $\mathrm{SL}_n(k) \times k^\times$ si et seulement si $x \mapsto x^n$ est un automorphisme de $k^\times$.

Exercice 6 Montrer qu'un groupe d'ordre 255 est cyclique.

Exercice 7 Soient H et N deux groupes, ϕ et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ deux morphismes. On veut trouver des conditions nécessaires et suffisantes telles que $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ soient isomorphes.

1. S'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \phi \circ \alpha$, montrer que l'on a la conclusion attendue.
2. S'il existe un automorphisme u de N tel que
$$\forall h \in H,\ \phi(h) = u\psi(h)u^{-1},$$
montrer que la conclusion attendue vaut encore.
3. Si H est cyclique et $\phi,\ \psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ tels que $\phi(H) = \psi(H)$, montrer que $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes (on "rappelle" que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ par l'application qui à α associe $\alpha(1)$ de réciproque $d \mapsto (x \mapsto dx)$).

Exercice 8 1. Soient $p < q$ deux nombres premiers. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes de cardinal pq.

2. Si $q \geq 3$ en déduire que tout groupe de cardinal $2q$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ ou au groupe diédral D_q.

Exercice 9 1. Montrer qu'un groupe d'ordre 8 est isomorphe à l'un des groupe suivants :
$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3,\ D_4,\ \mathbb{H}_8,$$
et l'on justifiera que $\mathbb{H}_8$ n'est pas un produit semi-direct.

2. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ possède un unique 2-Sylow que l'on identifiera.

Exercice 10 1. Déterminer les p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

2. Soient ϕ et ψ deux morphismes non-triviaux de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. En notant pour tout entier k, ϕ_k le morphisme défini par $\phi_k(x) = \phi(kx)$, montrer qu'il existe un entier k et une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tels que $\psi = P\phi_k P^{-1}$.
3. En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, un unique produit semi-direct non-trivial $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. Montrer que le centre de ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.