
Feuille d'exercices 5

Exercice 1 Déterminer le groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$.

Exercice 2 Soient G un groupe et H un sous-groupe de G .

1. Montrer que si G est résoluble, alors H l'est aussi.
2. On suppose désormais dans la suite que H est distingué dans G . Montrer que si G est résoluble, alors G/H est résoluble.
3. Montrer que si H et G/H sont résolubles, alors G est résoluble.
4. Si G est résoluble et simple, montrer que G est cyclique de cardinal un nombre premier.
5. Montrer que \mathcal{S}_3 et D_4 sont résolubles.
6. Montrer que \mathcal{S}_n n'est pas résoluble si $n \geq 5$.
7. Soit p un nombre premier. Montrer que tout p -groupe est résoluble.

Exercice 3 Soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et notons $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer l'ordre de S , de T et de ST .
2. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
 - (a) Calculer $S\gamma$ et $T\gamma$.
 - (b) Montrer que si $c = 0$ alors $\gamma \in \langle T, S \rangle$.
 - (c) On suppose $c \neq 0$. Montrer qu'il existe $g \in \langle T, S \rangle$ tel que $g\gamma$ soit de la forme $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$. Conclure que $\gamma \in \langle T, S \rangle$.
 - (d) Dédire que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par T et S .

Exercice 4 1. Soit K un corps et E un K -espace vectoriel de dimension finie. Rapeler pourquoi $\mathrm{PGL}(E)$ agit fidèlement sur $\mathrm{P}(E)$.

2. Expliciter un isomorphisme entre $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2)$ et \mathcal{S}_3 .
3. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à \mathcal{S}_4 et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à \mathcal{A}_4 .
4. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ est isomorphe à \mathcal{A}_5 .
5. On rappelle que si H est un sous-groupe d'indice n dans S_n , il est isomorphe à \mathcal{S}_{n-1} . Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$.
6. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ n'est pas isomorphe à \mathcal{S}_4 .

Exercice 5 On veut montrer un théorème de Jordan-Frobenius : *tout sous groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ admet un sous-groupe distingué, commutatif, d'indice fini, borné par une fonction explicite de n .* Soit $n \geq 1$; on munit le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^n du produit scalaire hermitien usuel $(\cdot | \cdot)$. On note $U_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes. Soit enfin G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. En considérant $(x|y)_G := |G|^{-1} \sum_{g \in G} (gx|gy)$, montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $U_n(\mathbb{C})$.
2. On suppose désormais que $G \subset U_n(\mathbb{C})$ et on munit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de la norme triple. Soient $u, h \in U_n(\mathbb{C})$ tels que u commute avec $[u, h] = uhu^{-1}h^{-1}$ et tels que h vérifie $\|id - h\| < \sqrt{2}$. En considérant les espaces propres de u et de huh^{-1} , prouver que u et h commutent.
3. Soit $v \in U_n(\mathbb{C})$. On suppose que u et v vérifient $\|id - u\| < 2^{-1}$ et $\|id - v\| < \sqrt{2}$. On définit la suite (v_k) par $v_0 := v$ et $v_{k+1} = [u, v_k]$. Prouver l'inégalité suivante, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$\|id - v_k\| \leq 2^k \|id - u\|^k \|id - v\|.$$

4. Montrer que u et v commutent si et seulement si la suite (v_k) est stationnaire.
5. Soit $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ un réel et soit H_δ le sous-groupe de G engendré par les $\{g \in G \mid \|id - g\| < \delta\}$. Montrer que H_δ est un sous-groupe abélien, distingué dans G .
6. On identifie $U_n(\mathbb{C})$ à un sous-ensemble du \mathbb{R} -ev $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^{2n^2}$ muni de la norme induite par la norme hermitienne sur $M_n(\mathbb{C})$. Soit T un système de représentants de G/H_δ . Montrer que

$$\bigcup_{t \in T} \bar{B}(t, \frac{\delta}{2}) \subset \bar{B}(0, 1 + \frac{\delta}{2}) - \bar{B}(0, 1 - \frac{\delta}{2}).$$

7. Conclure.