Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Feuille d'exercices 5

Exercice 1 Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

1. Montrer que si G est résoluble, alors H l'est aussi.
2. On suppose désormais dans la suite que H est distingué dans G. Montrer que si G est résoluble, alors G/H est résoluble.
3. Montrer que si H et G/H sont résolubles, alors G est résoluble.
4. Si G est résoluble et simple, montrer que G est cyclique de cardinal un nombre premier.
5. Montrer que $\mathscr{S}_3$ et D_4 sont résolubles.
6. Montrer que $\mathscr{S}_n$ n'est pas résoluble si $n \geq 5$
7. Soit p un nombre premier. Montrer que tout p-groupe est résoluble.

Exercice 2 Soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et notons $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer l'ordre de S, de T et de ST.
2. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
   (a) Calculer $S\gamma$ et $T\gamma$.
   (b) Montrer que si $c = 0$ alors $\gamma \in < T, S >$.
   (c) On suppose $c \neq 0$. Montrer qu'il existe $g \in < T, S >$ tel que $g\gamma$ soit de la forme $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$. Conclure que $\gamma \in < T, S >$.
   (d) Déduire que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par T et S.

Exercice 3 Calculer les tables d'addition et multiplication de $\mathbb{F}_8$ et $\mathbb{F}_9$.

Exercice 4 Soient $n \geq 1$, p un nombre premier et q une puissance de p. Calculer les cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Exercice 5 1. Soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie. Rappeler pourquoi $\mathrm{PGL}(E)$ agit fidèlement sur $\mathrm{P}(E)$.

2. Expliciter un isomorphisme entre $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $\mathscr{S}_3$.

3. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à $\mathscr{S}_4$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à $\mathscr{A}_4$.

4. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ est isomorphe à $\mathscr{A}_5$.

5. On rappelle que si H est un sous-groupe d'indice n dans $\mathscr{S}_n$, il est isomorphe à $\mathscr{S}_{n-1}$. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$.

6. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ n'est pas isomorphe à $\mathscr{S}_4$.

Exercice 6 On veut montrer un théorème de Jordan-Frobenius : *tout sous groupe fini de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *admet un sous-groupe distingué, commutatif, d'indice fini, borné par une fonction explicite de* n. Soit $n \geq 1$; on munit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire hermitien usuel $(\ |\ )$. On note $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes. Soit enfin G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. En considérant $(x|y)_G := |G|^{-1} \sum_{g \in G} (gx|gy)$, montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $U_n(\mathbb{C})$.

2. On suppose désormais que $G \subset \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et on munit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de la norme triple. Soient $u, h \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ tels que u commute avec $[u,h] = uhu^{-1}h^{-1}$ et tels que h vérifie $||\mathrm{id} - h|| < \sqrt{2}$. En considérant les espaces propres de u et de huh^{-1}, prouver que u et h commutent.

3. Soit $v \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$. On suppose que u et v vérifient $||\mathrm{id} - u|| < 2^{-1}$ et $||\mathrm{id} - v|| < \sqrt{2}$. On définit la suite (v_k) par $v_0 := v$ et $v_{k+1} = [u, v_k]$. Prouver l'inégalité suivante, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:
$$||id - v_k|| \leq 2^k ||\mathrm{id} - u||^k ||\mathrm{id} - v||.$$

4. Montrer que u et v commutent si et seulement si la suite (v_k) est stationnaire.

5. Soit $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ un réel et soit H_δ le sous-groupe de G engendré par les $\{g \in G \mid ||\mathrm{id} - g|| < \delta\}$. Montrer que H_δ est un sous-groupe abélien, distingué dans G.

6. On identifie $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ à un sous-ensemble du $\mathbb{R}$-ev $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^{2n^2}$ muni de la norme induite par la norme hermitienne sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Soit T un système de représentants de G/H_δ. Montrer que
$$\bigcup_{t \in T} \bar{B}(t, \frac{\delta}{2}) \subset \bar{B}(0, 1 + \frac{\delta}{2}) - \bar{B}(0, 1 - \frac{\delta}{2}).$$

7. Conclure.