Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit (P, q) un k-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une forme quadratique. On suppose qu'il y a dans P au moins 3 droites isotropes. Montrer que le plan P est totalement isotrope.

Exercice 2 Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soient q et q' deux formes quadratiques sur E vérifiant $q^{-1}(0) = (q')^{-1}(0)$.

1. Supposons k algébriquement clos. Montrer qu'il existe $a \in k^\times$ tel que l'on ait $q' = aq$.
2. Donner un contre-exemple pour $k = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 3
1. Déterminer les rang et signatures de la forme quadratique suivante sur $M_n(\mathbb{R})$: $A \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$.
2. Même question pour $A \mapsto \mathrm{tr}({}^tAA)$ et pour $A \mapsto \mathrm{tr}(A)^2$.
3. Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit q la forme quadratique sur $M_2(k)$ donnée par $q(A) = \det(A)$. Donner une base hyperbolique de $M_2(k)$ pour q et exhiber un élément non diagonalisable de $O(q)$.

Exercice 4 Soit k un corps de caractéristique différente de 2, soit E un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à 0 et soit H un hyperplan de E. Soient de plus q une forme quadratique non dégénérée sur E et u un élément de $O(q)$ vérifiant $u_{|H} = \mathrm{id}_H$.

1. Si $q_{|H}$ est non dégénérée, montrer que u est soit l'identité, soit la réflexion orthogonale d'hyperplan H.
2. Si $q_{|H}$ est dégénérée, montrer que u est l'identité.

Exercice 5 Soient $n \geq 1$ et $E = \mathbb{R}^{n+1}$ muni de la forme quadratique

$$q(x_0, \cdots, x_n) = x_0^2 - (x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

de forme bilinéaire b. Un sous-espace F de E est dit *elliptique* si $q_{|F}$ est définie négative, *hyperbolique* si $q_{|F}$ est de signature $(1, m)$ avec $m \geq 1$ et *parabolique* si F est isotrope.

1. Soit F un sous-espace de dimension au moins 2 tel qu'il existe $x \in F$ avec $q(x) > 0$. Montrer que F est hyperbolique.

2. Soit F un sous-espace elliptique de dimension au plus $n-1$. Montrer que $F^\perp$ est hyperbolique.

3. Soit F un espace parabolique. Montrer que $q_{|F}$ est de rang $\dim F - 1$.

Exercice 6 Soit k un corps. On définit son niveau $s(k) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$s(k) = \inf\{n \geq 1 \mid \exists (x_1, \cdots, x_n) \in k^n,\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1\},$$

avec la convention que l'infimum de l'ensemble vide est ∞.

1. Montrer que deux corps isomorphes ont même niveau. La réciproque est-elle vraie ?

2. Montrer que le niveau d'un corps fini est égal à 1 ou 2.

3. Montrer l'égalité $s(k) = s(k(X))$.

   On suppose désormais que k de caractéristique dfférente de 2. Pour $n \geq 1$, on considère la forme quadratique

   $$q_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

4. Montrer que q_n admet un vecteur isotrope si et seulement si on a $s(k) \leq n-1$.

5. Supposons $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout vecteur non nul $x = (x_1, \ldots, x_n)$, il existe une matrice T_x de première ligne $(x_1, \ldots, x_n)$ et vérifiant

   $${}^tT_x T_x = T_x^t T_x = q_n(x_1, \ldots, x_n) I_n.$$

6. En déduire que l'ensemble des sommes non nulles de 2^k carrés d'éléments de k est un groupe multiplicatif.

7. Montrer que le niveau d'un corps est soit infini, soit une puissance de 2.