École normale supérieure
Algèbre 1

Année 2014-2015

Feuille d'exercices 6

Les groupes $\mathbf{H}_8$, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$

Exercice 1
1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ possède un unique 2-Sylow H.
2. Montrer que H est isomorphe à $\mathbf{H}_8$.
3. Montrer que H est distingué dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$.
4. Montrer que le centralisateur de H dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ est $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

Exercice 2
1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ possède quatre 3-Sylow.
2. Vérifier que dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ il y a 8 éléments d'ordre 3.
3. Montrer que dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ il y a deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 3.
4. Vérifier que dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ il y a 8 éléments d'ordre 6 et qu'il y a deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 6.

Exercice 3
1. Montrer que le groupe quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)/\mathbf{H}_8$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
2. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ est le groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$.
3. Soit B un sous-groupe d'ordre 6 de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$. Montrer qu'il est commutatif.

Exercice 4
1. Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathbf{H}_8$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$.
2. Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
3. Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 5
1. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ possède trois 2-Sylow.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ possède quatre 3-Sylow.
3. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ possède quatre sous-groupes d'ordre 12.

Exercice 6
1. Représenter graphiquement le treillis des sous-groupes de $\mathbf{H}_8$.
2. Représenter graphiquement le treillis des sous-groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$.
3. (Difficile) Représenter graphiquement le treillis des sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$.

Simplicité de $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{K})$

Exercice 7 Montrer que les groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_3)$ ne sont pas simples.

Exercice 8 Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. On dira que G agit *primitivement* sur X si

1. l'action de G sur X est transitive ;
2. le stabilisateur G_x d'un point de X (donc de tout point de X) est un sous-groupe maximal de G, c'est-à-dire que les seuls sous-groupes de G contenant G_x sont G_x et G.

On dit que l'action de G sur X est *2-transitive* si

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in X \qquad (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2 \implies \exists g \in G \quad g \cdot x_1 = y_1 \quad g \cdot x_2 = y_2).$$

Montrer que toute action primitive est 2-transitive.

Exercice 9 Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Supposons que le groupe G agisse primitivement sur X. Si on se donne, pour chaque $x \in X$, un sous-groupe $T_x \leq G$ tel que

1. T_x est abélien ;
2. $T_{g\cdot x} = gT_xg^{-1}$ pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$;
3. $\bigcup_{x\in X} T_x$ engendre G,

alors tout sous-groupe distingué de G agissant non trivialement sur X contient $D(G)$.

Exercice 10 Soit $\mathbf{K}$ un corps. Considérant l'action de $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{K})$ sur $X = \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{K})$, montrer que le groupe $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{K})$ est simple sauf si $n = 2$, et $\mathbf{K} = \mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$.

Exercices supplémentaires

Exercice 11

1. Soit p un nombre premier. Montrer que la réduction modulo p des coefficients d'une matrice induit un morphisme de groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ qui est surjectif.
2. Montrer que ce résultat reste vrai en remplaçant p par n'importe quel entier $N \geq 2$.

Exercice 12

1. Montrer que le groupe dérivé $D(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$ est d'indice ≤ 12 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.
2. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ a un quotient d'ordre 2 et un quotient d'ordre 3.
3. En déduire que l'indice de $D(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est 6 ou 12.

Exercice 13 Soit $\mathbf{K}$ un corps et soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des classes de conjugaisons sous $\mathrm{SL}(E)$ des transvections de E. On fixe une base de E et, pour $a \in \mathbf{K}^\times$, on note T_a la transvection de matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

1. Montrer que T_a et T_b sont conjuguées si et seulement si ab^{-1} est un élément de $\mathbf{K}^{\times 2}$.
2. En déduire une bijection entre $\mathbf{K}^\times/\mathbf{K}^{\times 2}$ et $\mathcal{T}$.
3. Que dire de plus si $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{F}_p$?

Exercice 14 Soit $\mathbf{K}$ un corps fini et soit n un entier ≥ 1. Décrire tous les morphismes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}^\times$.

Exercice 15 Soit X un polyèdre régulier de l'espace euclidien de dimension 3. On note $\mathrm{Isom}(X)$ le groupe des isométries laissant X invariant et $\mathrm{Isom}^+(X)$ son sous-groupe des isométries positives.

1. Montrer que si 0 est centre de symétrie de X, le groupe $\mathrm{Isom}(X)$ est isomorphe au produit direct $\mathrm{Isom}^+(X) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Soit Δ un tétraèdre régulier.

1. Montrer que $\mathrm{Isom}(\Delta)$ et $\mathrm{Isom}^+(\Delta)$ sont respectivement isomorphes à $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$. Le groupe $\mathrm{Isom}^+(\Delta)$ est-il un facteur direct de $\mathrm{Isom}(\Delta)$?
2. Montrer que $\mathfrak{A}_4$ possède un unique sous-groupe d'ordre 4 et que ce dernier est isomorphe au *groupe de Klein* $V_4 := \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. En déduire l'isomorphisme $\mathrm{Isom}^+(\Delta) \simeq V_4 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Ce produit est-il direct ?

Soit C un cube.

1. En considérant les diagonales du cube, montrer que l'on a un morphisme $\mathrm{Isom}(C) \to \mathfrak{S}_4$. En déduire les isomorphismes $\mathrm{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom}(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
2. En remarquant que l'ensemble des sommets de C est la réunion des sommets de deux tétraèdres réguliers, lire la signature de $\mathfrak{S}_4$ dans $\mathrm{Isom}^+(C)$.
3. Lire le groupe de Klein dans $\mathrm{Isom}^+(C)$.