Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Feuille d'exercices 6b

Exercice 1 (Une preuve alternative de la simplicité de $\mathrm{PSL}_n(K)$, pour $n \geq 3$)
Soient K un corps, $n \geq 3$ et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ qui est $\mathrm{SL}_n(K)$-*invariant*, ie vérifie

$$\forall s \in \mathrm{SL}_n(K), \quad sGs^{-1} \subset G.$$

1. On suppose pour cette question que G contient une transvection $T \neq \mathrm{id}$. Montrer que $\mathrm{SL}_n(K) \subset G$.

2. On suppose ici et dans la suite que G n'est pas inclus dans le centre Z de $\mathrm{GL}_n(K)$. On veut montrer que là encore, $\mathrm{SL}_n(K) \subset G$.

   (a) Soit $\sigma \in G - Z$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul a tel que $b = \sigma(a)$ n'est pas colinéaire à a. Soit τ une transvection de droite $< a >$ et $\rho = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Soit H un hyperplan de E contenant le plan $< a, b >$.

   (b) Montrer que $\rho \in G$, que $\rho(H) = H$ et que pour tout vecteur x, on a $\rho(x) - x \in H$.

   (c) Conclure s'il existe une transvection u d'hyperplan H, qui ne commute pas à ρ.

   (d) Conclure si ρ commute à toutes les transvections d'hyperplan H.

Exercice 2 Soient K un corps et E un K-ev de dimension 2. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des classes de conjugaisons sous $\mathrm{SL}(E)$ des transvections de E. Pour $a \in K^\times$, on note T_a la transvection de matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que T_a et T_b sont conjuguées si et seulement si ab^{-1} est un élément de $K^{\times 2}$.

2. En déduire une bijection entre $K^\times / K^{\times 2}$ et $\mathcal{T}$.

3. Que dire de plus si $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$?

Exercice 3 Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et $m \geq 3$. Soit $V = k^{2m}$, muni de la forme bilinéaire alternée usuelle b; on note $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ le groupe correspondant. Soient $s, t \in \mathrm{Sp}_{2m}(k)$ deux involutions.

a) Montrer que l'on peut écrire une décomposition $V = E_+(s) \oplus^\perp E_-(s)$ où $E_+(s)$ et $E_-(s)$ désignent respectivement les espaces propres de s associées aux valeurs propres 1 et -1.

b) En déduire une bijection entre l'ensemble des involutions de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ et l'ensemble des sous-espaces non dégénérés de V.

On dit que l'involution s est de type $(2r, 2m-2r)$ si l'espace $E_+(s)$ est de dimension $2r$. On parle d'*involution extrémale* pour une involution de type $(2, 2m-2)$ ou $(2m-2, 2)$. Dans ce cas-là, on note $E_2(s)$ l'espace $E_\pm(s)$ de dimension 2.

c) En considérant les familles commutatives maximales d'involutions conjuguées dans $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$, montrer que tout automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ envoie une involution extrémale sur une involution extrémale.

On dit que deux involutions extrémales s et t forment un *couple minimal* (s,t) si on a $\dim E_2(s) \cap E_2(t) = 1$. Si $\mathscr{S} \subseteq \mathrm{Sp}_{2m}(k)$ est un ensemble d'involutions extrémales, on note $C(\mathscr{S})$ l'ensemble des involutions extrémales qui commutent à tout élément de $\mathscr{S}$.

d) Montrer que s et t forment un couple minimal si et seulement si ($st \neq ts$ et pour tous $s', t' \in C(C(\{s,t\}))$ avec $s't' \neq t's'$ on a $C(C(\{s,t\})) = C(C(\{s',t'\}))$).

e) Déterminer les ensembles maximaux I d'involutions extrémales tels que toute paire d'éléments de I forme un couple minimal ou commute.

Soit $n \geq 3$. On note $\Gamma\mathrm{L}_n(k)$ le groupe des transformations semi-linéaires de k^n. On admet le théorème fondamental de la géométrie projective, qui est l'énoncé suivant.
Soit $\phi : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$ une bijection telle que trois points A_1, A_2, A_3 de $\mathbb{P}^n(k)$ sont alignés si et seulement si $\phi(A_1), \phi(A_2), \phi(A_3)$ le sont. Alors il existe un isomorphisme de corps $\sigma : k \to k$ et une transformation σ-linéaire $\gamma \in \Gamma\mathrm{L}_{n+1}(k)$ telle que ϕ soit induite par γ.
On définit enfin $\Gamma\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ le sous-groupe de $\Gamma\mathrm{L}_{2m}(k)$ des éléments préservant la forme b.

f) Déduire que tout automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ est de la forme $x \mapsto axa^{-1}$ pour un certain élément $a \in \Gamma\mathrm{Sp}_{2m}(k)$.