Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Feuille d'exercices 7

Exercice 1 Montrer que toute forme sesquilinéaire réelle est bilinéaire.

Exercice 2 Soient k un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $k' = k(i)$. On munit k' de l'involution induite par la conjugaison complexe. Soient E' un k'-espace vectoriel et E le k-espace vectoriel sous-jacent. Une forme k-bilinéaire f sur $E \times E$ est dite *invariante par* i si l'on a $f(ix, iy) = f(x, y)$ pour tous $x, y \in E$.

a) Montrer que l'application $\phi \mapsto \big((x, y) \mapsto \phi(x, y) + i\phi(x, iy)\big)$ est un isomorphisme de l'espace des formes bilinéaires invariantes par i sur $E \times E$ sur celui des formes sesquilinéaires sur $E' \times E'$.

b) Montrer qu'elle induit un isomorphisme de l'espace des formes symétriques invariantes par i sur $E \times E$ sur l'espace des formes hermitiennes sur $E' \times E'$.

c) Dans ce cas-là, montrer que $(x, y) \mapsto \phi(x, iy)$ est antisymétrique.

Exercice 3 Soient k un corps, E un espace vectoriel sur k, ϕ une forme sesquilinéaire sur $E \times E$ et u un endomorphisme de E.
Si $v : E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, on définit sa *transposée* comme étant l'application $\begin{array}{cccc} {}^t v : & F^* & \to & E^* \\ & f & \mapsto & f \circ v \end{array}$.

a) Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) il existe un unique endomorphisme u^* de E vérifiant $\phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y))$ pour tous $x, y \in E$;

   (ii) l'application d_ϕ est injective et on a l'inclusion ${}^t u(d_\phi(E)) \subseteq d_\phi(E)$.

b) Donner un exemple où E est de dimension infinie, d_ϕ est injective, mais où ${}^t u(d_\phi(E))$ n'est pas contenu dans $d_\phi(E)$.

Exercice 4 Soient k un corps, E_0 et E_1 deux espaces vectoriels sur k et ϕ_0, ϕ_1 des formes sesquilinéaires respectivement sur $E_0 \times E_0$ et $E_1 \times E_1$. On suppose que ϕ_1 est non dégénérée et qu'il existe un élément $\alpha \in k$ et une bijection ensembliste $v : E_0 \to E_1$ tels que l'on ait $\phi_1(v(x), v(y)) = \phi_0(x, y)\alpha$ pour tous $x, y \in E_0$.

a) Montrer que ϕ_0 est non dégénérée et que v est linéaire.

Soient E_2 un espace vectoriel sur k et ϕ_2 une forme sesquilinéaire non dégénérée sur $E_2 \times E_2$. On suppose l'existence d'une application linéaire surjective $u : E_1 \to E_2$ qui vérifie

$$\phi_2(u(x), u(y)) = 0 \Rightarrow \phi_1(x, y) = 0 \quad \text{pour tous } x, y \in E_1.$$

b) Montrer que u est un isomorphisme de E_1 sur E_2.

c) Montrer que pour tout $y \in E_1$, il existe un élément $m(y) \in k$ tel que l'on ait $\phi_2(u(x), u(y)) = \phi_1(x, y)m(y)$ pour tout $x \in E_1$.

d) En déduire qu'il existe $\beta \in k^\times$ tel que l'on ait $\phi_2(u(x), u(y)) = \phi_1(x, y)\beta$ pour tous $x, y \in E_1$.

Exercice 5 Soit p un nombre premier impair et $q = p^r$ une puissance d'un tel nombre premier, avec $r \geq 1$. On rappelle que $\mathbb{F}_{q^2}$ est muni de l'involution de Frobenius $x \mapsto x^q$ (unique involution non triviale de $\mathbb{F}_{q^2}$; son corps des invariants est $\mathbb{F}_q$). On pose $E_n = \mathbb{F}_{q^2}^n$.

1. Montrer qu'il y a sur (E_n, σ) une unique classe d'équivalence de formes hermitiennes. Montrer qu'une telle forme admet dans une base convenable la matrice identité.

2. Soient z_n, y_n le nombre respectif de vecteurs non triviaux de E_n de norme 0 et 1. Par récurrence, montrer que l'on a pour tout entier $n \geq 1$,

$$z_n = (q^n - (-1)^n)(q^{n-1} + (-1)^n) \quad \text{et} \quad y_n = q^{n-1}(q^n - (-1)^n).$$

3. Calculer l'ordre de $U_n(\mathbb{F}_{q^2})$.

4. En déduire l'ordre de $SU_n(\mathbb{F}_{q^2})$.

Exercice 6

1. Rappeler l'ordre de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$.

2. À partir de l'action naturelle de S_6 sur $\mathbb{F}_2^6$, construire une action de S_6 sur un sous-espace E de dimension 5. En déduire une action de S_6 sur un quotient de dimension 4 de V muni d'une forme bilinéaire alternée.

3. Conclure que S_6 est isomorphe à $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$.