École normale supérieure Année 2014-2015
Algèbre 1

Feuille d'exercices 7

Exercice 1 Décomposer sous forme de carrés les formes quadratiques réelles suivantes ; en déduire leur signature et leur rang.

1. $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$.
2. $f(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.
3. $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.
4. $f(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$.
5. $f(x_1, \ldots, x_5) = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} x_i x_j$.
6. $f(A) = \mathrm{tr}(A^2)$, pour $A \in M_n(\mathbf{R})$.
7. $f(A) = \mathrm{tr}({}^tAA)$, pour $A \in M_n(\mathbf{R})$.
8. $f(A) = \mathrm{tr}(A)^2$, pour $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Exercice 2 Soit $n \geq 1$ et soit $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Pour tous $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$, on pose :

$$B(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \qquad \text{et} \qquad f(P) = B(P, P).$$

1. Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
2. La forme f a-t-elle des vecteurs isotropes non nuls ?
3. Calculer la matrice de f dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
4. Pour $n = 2$, déterminer la signature de f. La forme f est-elle positive ? Négative ?

Exercice 3 Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Soit P un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une forme quadratique f. On suppose qu'il y a dans P au moins 3 droites isotropes. Montrer $f = 0$.

Exercice 4 Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et f' des formes quadratiques sur E vérifiant $f^{-1}(0) = (f')^{-1}(0)$.

1. Supposons $\mathbf{K}$ algébriquement clos. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{K}^\times$ tel que l'on ait $f' = af$.

2. Donner un contre-exemple pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $E = \mathbf{R}^2$.

Exercice 5 Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Soit f la forme quadratique sur $M_2(\mathbf{K})$ donnée par $f(A) = \det(A)$. Exhiber un élément non diagonalisable de $O(f)$.

Exercice 6 Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit H un hyperplan de E. Soient de plus f une forme quadratique non dégénérée sur E et u un élément de $O(E, f)$ vérifiant $u|_H = \mathrm{Id}_H$.

1. Si $f|_H$ est non dégénérée, montrer que u est soit l'identité, soit la réflexion orthogonale d'hyperplan H.
2. Si $f|_H$ est dégénérée, montrer que u est l'identité.

Exercice 7 Soit $n \geq 1$ et soit $E = \mathbf{R}^{n+1}$ muni de la forme quadratique

$$f(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

de forme bilinéaire b. Un sous-espace F de E est dit *elliptique* si $f|_F$ est définie négative, *hyperbolique* si $f|_F$ est de signature $(1, m)$ avec $m \geq 1$ et *parabolique* si F est isotrope.

1. Soit F un sous-espace de dimension au moins 2 tel qu'il existe $x \in F$ avec $f(x) > 0$. Montrer que F est hyperbolique.
2. Soit F un sous-espace elliptique de dimension au plus $n - 1$. Montrer que $F^\perp$ est hyperbolique.
3. Soit F un espace parabolique. Montrer que $f|_F$ est de rang $\dim F - 1$.

Exercice 8 Soit $\mathbf{K}$ un corps. On définit son niveau $s(\mathbf{K}) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ par

$$s(\mathbf{K}) = \inf\{n \geq 1 \mid \exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1\},$$

avec la convention que l'infimum de l'ensemble vide est ∞.

1. Montrer que des corps isomorphes ont même niveau. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que le niveau d'un corps fini est égal à 1 ou 2.
3. Montrer l'égalité $s(\mathbf{K}) = s(\mathbf{K}(X))$.

   On suppose désormais que $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de 2. Pour $n \geq 1$, on considère la forme quadratique

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

4. Montrer que f_n admet un vecteur isotrope si et seulement si on a $s(\mathbf{K}) \leq n - 1$.

5. Supposons $n = 2^k$ avec $k \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ non nul, il existe une matrice T_x de première ligne $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant

$$ {}^tT_x T_x = T_x {}^tT_x = f_n(x_1, \ldots, x_n) I_n. $$

6. En déduire que l'ensemble des sommes non nulles de 2^k carrés d'éléments de $\mathbf{K}$ est un groupe multiplicatif.
7. Montrer que le niveau d'un corps est soit infini, soit une puissance de 2.