Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014

Algèbre 1

Feuille d'exercices 8

Exercice 1 Déterminer les groupes unitaires, orthogonaux et symplectiques en dimension 1.

Exercice 2 Soient p un nombre premier impair, $f \geq 1$ et $q = p^f$. Soit b la forme sur $(\mathbb{F}_{q^2})^3 \times (\mathbb{F}_{q^2})^3$ définie par $b(u,v) = u_1 v_3^q + u_2 v_2^q + u_3 v_1^q$

1. Déterminer l'ensemble Δ des droites isotropes de b. Quel est le cardinal de Δ?
2. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $(\mathbb{F}_{q^2})^3$. On définit aussi les éléments $t_{\alpha,\beta}$ et $h_{\gamma,\delta}$ de $PU_3(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ correspondant aux respectivement aux matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta^q & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-q} \end{pmatrix}$$
avec les conditions $\delta^{1+q} = 1$, $\gamma \neq 0$, $\alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0$. Déterminer le stabilisateur de ke_1 dans $PU_3(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ et montrer que $T := \{t_{\alpha,\beta} \mid \alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0\}$ en est un sous-groupe normal.
3. Montrer que l'action de $PU_3(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ sur Δ est 2-transitive.

Exercice 3 Soit H la $\mathbb{R}$-algèbre des quaternions de Hamilton. Un élément $z \in \mathrm{H}$ est dit *pur* s'il s'écrit sous la forme $z = bi + cj + dk$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $z \in \mathrm{H}$ est pur si et seulement si $z^2 \in \mathbb{R}^-$.
2. Montrer que tout élément de H est produit de deux quaternions purs.
3. Montrer que tout automorphisme d'anneaux de H est de la forme $x \mapsto qxq^{-1}$ pour un certain $q \in \mathrm{H}$ de norme 1.
4. Vérifier que la transposée sur $M_2(\mathrm{H})$ ne conserve pas le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathrm{H})$.

Exercice 4 (Quaternions généralisés) Soit k un corps de caractéristique différente de 2 et soient $\alpha, \beta \in k^\times$. On définit une k-algèbre de dimension 4, $\mathrm{H}_{\alpha,\beta}$ (l'*algèbre des quaternions généralisés*) munie d'une base $(1, i, j, k)$ telle que

$$1 \text{ est le neutre pour la multiplication, } \; i^2 = \alpha, \; j^2 = \beta, \; ij = -ji = k.$$

On définit comme on pense une conjugaison et la norme réduite N.

1. Montrer que si k est algébriquement clos alors $\mathrm{H}_{\alpha,\beta}$ est isomorphe à $M_2(k)$.

2. Montrer que $\mathrm{H}_{\alpha,\beta}$ est une algèbre à division si et seulement si N est une forme anisotrope sur le k-ev $\mathrm{H}_{\alpha,\beta}$.

3. Montrer que si $k = \mathbb{F}_q$ alors $\mathrm{H}_{\alpha,\beta}$ n'est pas intègre.

4. Soient $\alpha', \beta' \in k^\times$. Montrer que les k-algèbres $\mathrm{H}_{\alpha,\beta}$ et $\mathrm{H}_{\alpha',\beta'}$ sont isomorphes si et seulement si les normes N et N' associées sont des formes quadratiques isométriques.

Exercice 5 (Théorème de Lagrange) Soit A un anneau unitaire et $\mathrm{H}(A)$ la A-algèbre des éléments $a+bi+cj+dk$ avec $a,b,c,d \in A$ telle que 1 est neutre pour la multiplication et avec les relations que l'on croit :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \ ij = -ji = k, \ jk = -kj = i, \ ki = -ik = j.$$

On construit comme précédemment, la conjuguaison et la norme réduite N.

1. Montrer que N est à valeurs dans A et que N est multiplicative.

2. On définit les *quaternions d'Hurwitz* par

$$H := \left\{ a + bi + ck + dk \in \mathrm{H}(\mathbb{Q}) \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}^4 \right) \right\}.$$

   Montrer que H est un sous-anneau de $\mathrm{H}(\mathbb{Q})$ contenant $\mathrm{H}(\mathbb{Z})$ et vérifiant $N(z) = 1$ si et seulement si z est inversible dans H.

3. Montrer que tout idéal à droite (respectivement à gauche) est principal.

4. Montrer que, pour tout nombre premier p, il existe $z \in H$ tel que $N(z) = p$.

5. Montrer que tout entier naturel est somme de quatre carrés.

Exercice 6 (Groupe des commutateurs $\Omega(q)$ de $\mathrm{O}(q)$) Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et $n \geq 2$. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur k^n. On définit $\Omega(q)$ et $\mathrm{S}\Omega(q)$ comme étant les sous-groupes dérivés respectifs de $\mathrm{O}(q)$ et $\mathrm{SO}(q)$.

1. Prouver que $\Omega(q)$ est engendré par les produits $s(wsw^{-1})$ de deux réflexions conjuguées.

2. Prouver que $\Omega(q)$ est engendré par les commmutateurs $sts^{-1}t^{-1} = (st)^2$ où s et t sont des réflexions.

3. Montrer que $\Omega(q) \subset \mathrm{SO}(q)$ et que si $n \geq 3$ alors $\mathrm{S}\Omega(q) = \Omega(q)$.

4. Montrer que si $u \in O(q)$ alors $u^2 \in \Omega(q)$.

5. On suppose dans cette question que $k \neq \mathbb{F}_3$ et que $P \subset k^n$ est un plan non isotrope. Prouver qu'il existe $u \in \mathrm{O}(q)$ tel que $u_{|P^\perp} = \mathrm{Id}$ et $u^2 \neq \mathrm{Id}$.

6. Conclure que si $k \neq \mathbb{F}_3$ et si $n \geq 3$ alors le centre de $\Omega(q)$ est $\{\pm 1\} \cap \Omega(q)$.

7. Si $k = \mathbb{F}_3$ et $n \geq 4$ montrer que toute droite non isotrope est intersection de deux plans anisotropes et conclure comme précédemment.

8. Montrer que le résultat reste encore vrai si $k = \mathbb{F}_3$ et $n = 3$.