École normale supérieure Année 2014-2015
Algèbre 1

Feuille d'exercices 9

Formes sesquilinéaires

Exercice 1 Montrer que toute forme sesquilinéaire réelle est bilinéaire.

Exercice 2 Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{R}$; on pose $\mathbf{K}' = \mathbf{K}(i)$. On munit $\mathbf{K}'$ de l'involution induite par la conjugaison complexe. Soit E' un $\mathbf{K}'$-espace vectoriel et soit E le $\mathbf{K}$-espace vectoriel sous-jacent. Une forme $\mathbf{K}$-bilinéaire f sur $E \times E$ est dite *invariante par* i si l'on a $f(ix, iy) = f(x, y)$ pour tous $x, y \in E$.

1. Montrer que l'application $\phi \mapsto \big((x, y) \mapsto \phi(x, y) + i\phi(ix, y)\big)$ est un isomorphisme de l'espace des formes bilinéaires invariantes par i sur $E \times E$ sur celui des formes sesquilinéaires sur $E' \times E'$.
2. Montrer qu'elle induit un isomorphisme de l'espace des formes symétriques invariantes par i sur $E \times E$ sur l'espace des formes hermitiennes sur $E' \times E'$.
3. Dans ce cas-là, montrer que $(x, y) \mapsto \phi(ix, y)$ est antisymétrique.

Exercice 3 Soit $\mathbf{K}$ un corps muni d'un automorphisme de corps involutif, soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, soit ϕ une forme sesquilinéaire sur $E \times E$ et soit u un endomorphisme de E.
Si $v : E \to F$ est une application linéaire entre espaces vectoriels, on définit sa *transposée* comme étant l'application $\begin{array}{rccc} {}^t v : & F^* & \to & E^* \\ & f & \mapsto & f \circ v \end{array}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) il existe un unique endomorphisme u^* de E vérifiant $\phi(u^*(x), y) = \phi(x, u(y))$ pour tous $x, y \in E$;
   (ii) l'application
   $$\begin{array}{rccc} d_\phi : E & \to & E^* \\ e & \mapsto & \phi(e, \cdot) \end{array}$$
   est injective et on a l'inclusion ${}^t u(d_\phi(E)) \subseteq d_\phi(E)$.
2. Donner un exemple où E est de dimension infinie, d_ϕ est injective, mais où ${}^t u(d_\phi(E))$ n'est pas contenu dans $d_\phi(E)$.

Exercice 4 Soit $\mathbf{K}$ un corps muni d'un automorphisme de corps involutif, soient E_0 et E_1 des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$ et soient ϕ_0, ϕ_1 des formes sesquilinéaires respectivement sur $E_0 \times E_0$ et $E_1 \times E_1$. On suppose que ϕ_1 est non dégénérée et qu'il existe un élément $\alpha \in \mathbf{K}$ et une bijection $v : E_0 \to E_1$ tels que l'on ait $\phi_1(v(x), v(y)) = \phi_0(x, y)\alpha$ pour tous $x, y \in E_0$.

1. Montrer que ϕ_0 est non dégénérée et que v est linéaire.

Soit E_2 un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ et soit ϕ_2 une forme sesquilinéaire non dégénérée sur $E_2 \times E_2$. On suppose l'existence d'une application linéaire surjective $u : E_1 \to E_2$ qui vérifie

$$\phi_2(u(x), u(y)) = 0 \Rightarrow \phi_1(x, y) = 0 \quad \text{pour tous } x, y \in E_1.$$

1. Montrer que u est un isomorphisme de E_1 sur E_2.
2. Montrer que pour tout $y \in E_1$, il existe un élément $m(y) \in \mathbf{K}$ tel que l'on ait $\phi_2(u(x), u(y)) = \phi_1(x, y)m(y)$ pour tout $x \in E_1$.
3. En déduire qu'il existe $\beta \in \mathbf{K}^\times$ tel que l'on ait $\phi_2(u(x), u(y)) = \phi_1(x, y)\beta$ pour tous $x, y \in E_1$.

Groupes classiques

Exercice 5 Déterminer les groupes unitaires, orthogonaux et symplectiques en dimension 1.

Exercice 6 Soit p un nombre premier impair et soit $q = p^r$ une puissance d'un tel nombre premier, avec $r \geq 1$. On rappelle que $\mathbf{F}_{q^2}$ est muni de l'involution de Frobenius $x \mapsto x^q$ (unique involution non triviale de $\mathbf{F}_{q^2}$; son corps des invariants est $\mathbf{F}_q$). On pose $E_n = \mathbf{F}_{q^2}^n$.

1. Montrer qu'il y a sur (E_n, σ) une unique classe d'équivalence de formes hermitiennes. Montrer qu'une telle forme admet dans une base convenable la matrice identité.
2. Soit z_n (resp. y_n) le nombre de vecteurs non triviaux de E_n de norme 0 (resp. 1). Par récurrence, montrer que l'on a pour tout entier $n \geq 1$

$$z_n = (q^n - (-1)^n)(q^{n-1} + (-1)^n) \quad \text{et} \quad y_n = q^{n-1}(q^n - (-1)^n).$$

3. Calculer l'ordre de $\mathrm{U}_n(\mathbf{F}_{q^2})$.
4. En déduire l'ordre de $\mathrm{SU}_n(\mathbf{F}_{q^2})$.

Exercice 7 On rappelle que l'ordre de $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_2)$ est 720.

1. À partir de l'action naturelle de $\mathfrak{S}_6$ sur $\mathbf{F}_2^6$, construire une action de $\mathfrak{S}_6$ sur un sous-espace vectoriel V de dimension 5. En déduire une action de $\mathfrak{S}_6$ sur un quotient de dimension 4 de V muni d'une forme bilinéaire alternée.
2. Conclure que $\mathfrak{S}_6$ est isomorphe à $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_2)$.

Exercice 8 Soit p un nombre premier impair et soit $f \geq 1$; on pose $q = p^f$. Soit b la forme sur $\mathbf{F}_{q^2}^3 \times \mathbf{F}_{q^2}^3$ définie par $b(u, v) = u_1 v_3^q + u_2 v_2^q + u_3 v_1^q$. On note $\mathrm{U}_3(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q)$ le groupe unitaire $\mathrm{U}(\mathbf{F}_{q^2}^3, b)$. Son cardinal est $q^3(q^3+1)(q^2-1)(q+1)$.

1. Déterminer l'ensemble Δ des droites isotropes de b. Quel est le cardinal de Δ ?
2. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{F}_{q^2}^3$. On définit aussi les éléments $t_{\alpha,\beta}$ et $h_{\gamma,\delta}$ de $\mathrm{PU}_3(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q)$ correspondant respectivement aux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta^q & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-q} \end{pmatrix}$$

   avec les conditions $\delta^{1+q} = 1$, $\gamma \neq 0$, $\alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0$. Déterminer le stabilisateur de $\mathbf{K}e_1$ dans $\mathrm{PU}_3(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q)$ et montrer que $T := \{t_{\alpha,\beta} \mid \alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0\}$ en est un sous-groupe distingué.
3. Montrer que l'action de $\mathrm{PU}_3(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q)$ sur Δ est 2-transitive.

Quaternions

Exercice 9 Soit $\mathbf{H}$ la $\mathbf{R}$-algèbre des quaternions de Hamilton. Un élément $z \in \mathbf{H}$ est dit *pur* s'il s'écrit sous la forme $z = bi + cj + dk$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que $z \in \mathbf{H}$ est pur si et seulement si $z^2 \in \mathbf{R}^-$.
2. Montrer que tout élément de $\mathbf{H}$ est produit de deux quaternions purs.
3. Montrer que tout automorphisme d'anneaux de $\mathbf{H}$ est de la forme $x \mapsto qxq^{-1}$ pour un certain $q \in \mathbf{H}$ de norme 1.
4. Vérifier que la transposée sur $M_2(\mathbf{H})$ ne conserve pas le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{H})$.

Exercice 10 (Quaternions généralisés) Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soient $\alpha, \beta \in \mathbf{K}^\times$. On définit une $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ de dimension 4 (l'*algèbre des quaternions généralisés*) munie d'une base $(1, i, j, k)$ pour laquelle

$$1 \text{ est le neutre pour la multiplication, } \; i^2 = \alpha, \; j^2 = \beta, \; ij = -ji = k.$$

On définit comme on pense une conjugaison et la norme réduite N.

1. Montrer que si $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ est isomorphe à $M_2(\mathbf{K})$.
2. Montrer que $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ est une algèbre à division si et seulement si N est une forme anisotrope sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$.
3. Montrer que si $\mathbf{K} = \mathbf{F}_q$ alors $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ n'est pas intègre.

Exercice 11 (Théorème de Lagrange) Soit A un anneau unitaire et soit $\mathbf{H}(A)$ la A-algèbre des éléments $a + bi + cj + dk$ avec $a, b, c, d \in A$ telle que 1 est neutre pour la multiplication et avec les relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

On construit comme précédemment la conjuguaison et la norme réduite N.

1. Montrer que N est à valeurs dans A et que N est multiplicative.
2. On définit les *quaternions d'Hurwitz* par
$$H := \left\{ a + bi + ck + dk \in \mathbf{H}(\mathbf{Q}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbf{Z}^4 \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbf{Z}^4 \right) \right\}.$$
Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-anneau de $\mathbf{H}(\mathbf{Q})$ contenant $\mathbf{H}(\mathbf{Z})$ et vérifiant $N(z) = 1$ si et seulement si z est inversible dans H.
3. Montrer que tout idéal à droite (resp. à gauche) est principal.
4. Montrer que, pour tout nombre premier p, il existe $z \in H$ tel que $N(z) = p$.
5. Montrer que tout entier naturel est somme de quatre carrés.