Quantification et théorème d'Egorov

Manolis Perrot et Arthur Touati, sous la direction de Laurent Charles

19 juin 2017

Résumé

L'analyse semi-classique est le domaine des mathématiques qui essaie de faire le lien entre la mécanique classique et la mécanique quantique. La mécanique quantique étudie des systèmes microscopiques, alors que la mécanique classique étudie des systèmes macroscopiques. Le paramètre numérique qui régit le passage entre les deux échelles est la constante de Planck réduite :

$$\hbar \approx 1,054\,571\,800\ \times 10^{-34}\text{J.s} \tag{1}$$

L'interprétation physique du lien entre les deux échelles est la suivante : dans la limite $\hbar \longrightarrow 0$, l'évolution d'un système est la même, que l'on adopte le point de vue classique ou quantique. Le but de ce mémoire est de rendre cette interprétation rigoureuse : c'est l'objet du théorème d'Egorov.

L'aspect central de la théorie est le concept de quantification. Il s'agit d'un procédé qui établit une correspondance entre les deux formalismes, et plus particulièrement qui envoie les observables classiques (i.e. les grandeurs physiques qui décrivent le système) sur les observables quantiques. Mathématiquement, il s'agit d'une application, souvent notée Op, qui à une fonction de l'espace des phases $\mathbb{R}^2$ associe un opérateur auto-adjoint de $L^2(\mathbb{R})$.

Dans la partie 1, après avoir présenté les deux formalismes et les analogies entre ceux-ci, nous déduirons les conditions que doit vérifier l'application Op. A la fin de cette même partie, nous verrons qu'il n'existe pas de quantification totalement satisfaisante qui respectent ces conditions.

Dans les parties 2 et 3, nous allons définir deux quantifications qui respectent "à $\hbar$ près" les conditions sus-citées, et étudier des propriétés fondamentales de celles-ci. Tout ce travail a pour but de se placer dans un cadre bien défini pour énoncer et démontrer le théorème d'Egorov (partie 4), qui indique que l'évolution classique et l'évolution quantique sont identiques "à $\hbar$ près".

Table des matières

Remerciements

Nous tenons à remercier chaleureusement Laurent Charles pour les nombreux entretiens qu'il nous a accordés, son aide toujours bienveillante et l'atmosphère agréable dans laquelle il a su placer ce mémoire. Merci de nous avoir introduit avec tant de passion à l'analyse semi-classique, et de nous avoir fait découvrir quel était le travail d'un chercheur.

1 Mécanique hamiltonienne et quantique

1.1 La mécanique hamiltonienne

L'étude de la mécanique hamiltonienne se formalise sur une variété symplectique M, i.e. une variété munie d'une forme symplectique définie comme suit :

Définition 1.1 (Forme symplectique)**.** *Une 2-forme $\omega \in \Omega^2(M)$ est symplectique si elle est fermée ($\mathrm{d}\omega = 0$) et si en tout point p de M ω_p est non dégénérée.*

Remarque 1. La non dégénérescence est aussi caractérisée par le fait suivant :

$$\forall p \in M,\ X \in T_pM \longmapsto \omega(X, .) \in T_p^*M \tag{2}$$

est un isomorphisme.

La caractérisation précédente nous permet d'introduire la notion de champ hamiltonien :

Définition 1.2. *Soit $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Le champ hamiltonien $X^h \in \Gamma(TM)$ de h est l'unique champ qui vérifie :*

$$\imath_{X^h}\omega = \mathrm{d}h \tag{3}$$

Définition 1.3 (Crochet de Poisson)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, deux observables classiques, et X^f et X^g leurs champs hamiltoniens respectifs. On définit le crochet de Poisson $\{f, g\} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ de f et g comme :*

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \omega(X^f, X^g) && (4)\\ &= X^g.f && (5)\\ &= -X^f.g && (6) \end{aligned}$$

Proposition 1.1 (Évolution temporelle d'une observable classique)**.** *Soient $h, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ deux observables classiques, X^h le champ hamiltonien de h et ϕ_t son flot. On a alors l'équation d'évolution :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g \circ \phi_t) = -\{h, g\} \circ \phi_t \tag{7}$$

On remarque que dans le cas particulier $g = h$, on a :

$$\forall t,\ h \circ \phi_t = h \tag{8}$$

Démonstration. Pour tout $x \in M$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \circ \phi_t(x) &= T_{\phi_t(x)}g\left[X^h(\phi_t(x))\right] && (9)\\ &= \left(X^h.g\right)(\phi_t(x)) && (10)\\ &= -\{h, g\} \circ \phi_t(x) && (11) \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant montrer une propriété d'invariance du crochet de Poisson qui sera utile pour la preuve finale du théorème d'Egorov :

Proposition 1.2. *Soient f, g et h trois observables, et ϕ_t le flot hamiltonien de h, on a :*

$$\{f \circ \phi_t, g \circ \phi_t\} = \{f, g\} \circ \phi_t \tag{12}$$

Démonstration. Cette propriété découle du fait plus général suivant : ϕ_t est un symplectomorphisme, *i.e.* $\phi_t^*\omega = \omega$. En effet d'après la formule de Cartan :

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\omega &= \mathcal{L}_X\omega && (13)\\
&= \mathrm{d}(\imath_X\omega) + \imath_X \mathrm{d}\omega && (14)\\
&= \mathrm{d}(\mathrm{d}f) && (15)\\
&= 0 && (16)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, le fait que $X^{\phi_t^* f} = \phi_t^* X^f$ est justifié par :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_x\phi_t^* f\,[Z(x)] &= \mathrm{d}_{\phi_t(x)} f \mathrm{d}_x\phi_t\,[Z(x)] && (17)\\
&= \omega_{\phi_t(x)}\left[X^f(\phi_t(x)), \phi_{t*}Z(\phi_t(x))\right] && (18)\\
&= \omega_{\phi_t(x)}\left[\phi_{t*}\phi_t^* X^f(\phi_t(x)), \phi_{t*}Z(x)\right] && (19)\\
&= (\phi_t^*\omega)_x\,[\phi_t^* X(x), Z(x)] && (20)\\
&= \omega_x\,[\phi_t^* X(x), Z(x)] && (21)
\end{aligned}
$$

pour tout champ de vecteur Z. On peut donc écrire :

$$
\begin{aligned}
\{f\circ\phi_t, g\circ\phi_t\}(x) &= \omega_x\left[\phi_t^* X^f(x), \phi_t^* X^g(x)\right] && (22)\\
&= (\phi_t^*\omega)_x\left[\phi_t^* X^f(x), \phi_t^* X^g(x)\right] && (23)\\
&= \omega_{\phi_t(x)}\left[\left(\phi_{t*}\phi_t^* X^f\right)(\phi_t(x)), \left(\phi_{t*}\phi_t^* X^g\right)(\phi_t(x))\right] && (24)\\
&= \omega_{\phi_t(x)}\left[X^f(\phi_t(x)), X^g(\phi_t(x))\right] && (25)\\
&= \{f, g\}\circ\phi_t(x) && (26)
\end{aligned}
$$

□

Par la suite, nous allons étudier un système mécanique à un degré de liberté (mais tout reste vrai en dimension n). L'état de celui-ci est entièrement déterminé au temps t par la donnée de sa position et de son impulsion (q, p) dans $\mathbb{R}^2$ muni de la forme $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$. Si on considère donnée l'énergie du système (l'hamiltonien "physique") $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, on peut calculer son champ hamiltonien X^h :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial q} &= \mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p\left[X^h, \frac{\partial}{\partial q}\right] = -[X^h]^2 && (27)\\
\frac{\partial h}{\partial p} &= \mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p\left[X^h, \frac{\partial}{\partial p}\right] = [X^h]^1 && (28)
\end{aligned}
$$

On retrouve bien le résultat classique suivant : la trajectoire générée par le flot hamiltonien $(q(t), p(t)) = \phi_t^h(q, p)$ vérifie les équations de Hamilton (équations du mouvement) :

$$
\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial h}{\partial p} && (29)\\
\dot{p} &= -\frac{\partial h}{\partial q} && (30)
\end{aligned}
$$

Enfin, on peut calculer l'expression du crochet de Poisson :

$$\{f, g\} = \omega(X^f, X^g) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial g}{\partial p} \\ -\frac{\partial f}{\partial q} & -\frac{\partial g}{\partial q} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} \tag{31}$$

1.2 La mécanique quantique

Nous allons introduire la mécanique quantique de façon formelle, afin de motiver l'étude mathématique des quantifications qui sera développée dans les parties suivantes.

1.2.1 Description quantique de systèmes physiques

En mécanique quantique, toute l'information nécessaire à la description d'un système au temps t est contenue dans sa fonction d'onde ψ_t, qui est élément d'un certain espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Cet espace représente les différents états possibles du système. Dans toute la suite de ce mémoire, on se placera dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, qui décrit l'espace des positions d'un système à un degré de liberté. On verra dans la suite qu'il faudra se placer dans des espaces de régularité plus importante pour énoncer des résultats.

1.2.2 Observables et opérateurs

Les observables de la mécanique quantique sont des opérateurs linéaires agissant sur $\mathcal{H}$. L'un des objets de ce mémoire est de décrire comment associer à une grandeur physique f (par exemple la position, l'impulsion, l'énergie, le moment cinétique ...) une observable quantique $\hat{f}$. Trois observables jouent un rôle particulier en mécanique quantique :
— l'opérateur position $\widehat{Q} : \psi \longmapsto (q \longmapsto q\psi(q))$;
— l'opérateur impulsion $\widehat{P} : \psi \longmapsto -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi$;
— le hamiltonien $\widehat{H}$, qui correspond à l'énergie du système.

1.2.3 Equation de Schrödinger et évolution quantique

L'évolution temporelle des fonctions d'onde est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\partial_t\psi_t = \widehat{H}\psi_t \tag{32}$$

En ne s'intéressant qu'aux situations où $\widehat{H}$ ne dépend pas du temps, on peut définir l'opérateur d'évolution $\widehat{U}_t = e^{-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}}$, qui donne l'état et l'observable au temps t en fonction du temps 0 :

$$\psi_t = \widehat{U}_t\psi_0 \tag{33}$$

$$\widehat{f}_t = \widehat{U}_t\widehat{f}\widehat{U}_t^* \tag{34}$$

L'évolution temporelle de l'observable est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{U}_t\widehat{f}\widehat{U}_t^* &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{U}_t\right)\widehat{f}\widehat{U}_t^* + \widehat{U}_t\widehat{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{U}_t^* && (35) \\ &= \widehat{U}_t\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\widehat{f} + \frac{i}{\hbar}\widehat{f}\widehat{H}\right)\widehat{U}_t^* && (36) \\ &= -\frac{i}{\hbar}\widehat{U}_t\left[\widehat{H}, \widehat{f}\right]\widehat{U}_t^* && (37) \end{aligned}$$

où l'on a introduit le commutateur des opérateurs :

$$\left[\widehat{A}, \widehat{B}\right] = \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}$$

On peut résumer les correspondances quantiques et classiques dans le tableau suivant :

Classique	Quantique
grandeur physique g	opérateur quantique $\widehat{g}$
position q	$\widehat{Q}$: multiplication par q
impulsion p	$\widehat{P}$: $-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}$
flot hamiltonien ϕ_t	opérateur d'évolution $\widehat{U}_t$
crochet de Poisson $\{.,.\}$	commutateur $\frac{i}{\hbar}[.,.]$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \circ \phi_t = \{g, h\} \circ \phi_t$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{U}_t\widehat{g}\widehat{U}_t^* = \widehat{U}_t\frac{i}{\hbar}[\widehat{g}, \widehat{H}]\widehat{U}_t^*$
$g \circ \phi_t$	$\widehat{U}_t\widehat{g}\widehat{U}_t^*$

1.3 Le *no-go* théorème

Le but de la quantification est de trouver une application linéaire $Op : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathcal{L}\left(L^2(\mathbb{R})\right)$, où $\mathfrak{C}$ est une classe de fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ la plus large possible et contenant les fonctions $(q,p) \longmapsto q$ et $(q,p) \longmapsto p$, satisfaisant les trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
&(A) \;\; [Op(f), Op(g)] = -i\hbar Op\left(\{f,g\}\right)\\
&(B) \;\; Op(q) = Q, \quad Op(p) = P\\
&(C) \;\; Op\left(\overline{f}\right) = \left(Op(f)\right)^*
\end{aligned}$$

Ces conditions ont été déduites des analogies présentées dans le tableau précédent.

Le premier objectif des mathématiciens est de s'attaquer à la famille de fonctions la plus naturelle pour les physiciens : les polynômes. Les systèmes quantiques canoniques ont pour la plupart des hamiltoniens polynomiaux en Q et P (particule libre, oscillateur harmonique...). Nous allons voir que cet objectif est déjà trop ambitieux et qu'une quantification respectant les conditions $A - B - C$ n'est possible que pour les polynômes de degré au plus 2.

On note $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des polynômes en q et p de degré au plus 2. Notons que $\mathcal{P}_2$ est stable par crochet de Poisson. Nous allons montrer comment la quantification de l'espace $\mathcal{P}_2$ est possible et unique. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1. *Si $T \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}))$ est auto-adjoint et commute avec P et Q, alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $T = c\mathrm{Id}$.*

Démonstration. Montrons comment on peut faire agir T sur $S'(\mathbb{R})$: si $\chi \in S'(\mathbb{R})$ et si $\varphi \in S(\mathbb{R})$, on définit $T\chi \in S'(\mathbb{R})$ par $(T\chi)(\varphi) = \chi(T\varphi)$. En tant qu'opérateurs linéaires sur $S'(\mathbb{R})$, P et Q commutent encore avec T. Soit $a \in \mathbb{R}$, comme T et Q commutent, on a $(Q-a)T\delta_a = T(Q-a)\delta_a$. Or $(Q-a)\delta_a = 0$, donc $(Q-a)T\delta_a = 0$, ce qui implique que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T\delta_a = c(a)\delta_a$, où $c(a) \in \mathbb{C}$. Servons-nous de ce résultat pour comprendre l'action de T sur $S(\mathbb{R})$, soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$T\varphi(a) = \delta_a(T\varphi) = (T\delta_a)(\varphi) = c(a)\varphi(a) \tag{38}$$

Donc T est la multiplication par la fonction c, qui est donc $\mathcal{C}^\infty$ (prendre $\varphi(x) = e^{-x^2}$). On utilise maintenant le fait que T et P commutent, si $\varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$[T, P]\varphi(a) = -\varphi(a)c'(a) = 0 \tag{39}$$

La fonction c est donc constante, ce qui montre le résultat souhaité. □

Théorème 1.1. *Il existe une unique application linéaire*

$$Op : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{L}(S(\mathbb{R})) \tag{40}$$

vérifiant les conditions $A - B - C$.

La condition C est à comprendre de la manière suivante :

$$\forall f \in \mathcal{P}_2,\ \forall \varphi, \psi \in S(\mathbb{R}),\ \langle \varphi, Op(f)\psi \rangle = \langle Op(\overline{f})\varphi, \psi \rangle \tag{41}$$

Démonstration. Pour l'existence, on définit Op sur une base de $\mathcal{P}_2$:

$$Op(q) = Q,\ Op(p) = P,\ Op(1) = \mathrm{Id} \tag{42}$$

$$Op(q^2) = Q^2,\ Op(p^2) = P^2,\ Op(qp) = \frac{1}{2}(PQ + QP) \tag{43}$$

On vérifie aisément que l'application ainsi définie vérifie les conditions $A - B - C$. Montrons l'unicité : soit $\widetilde{Op}$ une autre application linéaire vérifiant les conditions $A - B - C$. Montrons que Op et $\widetilde{Op}$ coïncident sur la base canonique de $\mathcal{P}_2$, ce qui montrera l'unicité.
Comme $\{q, p\} = 1$, on a par A :

$$\widetilde{Op}(1) = \widetilde{Op}(\{q, p\}) = \frac{[Q, P]}{i\hbar} = \mathrm{Id} \tag{44}$$

On remarque ici que la condition $Op(1) = \mathrm{Id}$ découle de A. Comme $\{q^2, q\} = 0$ et $\{q^2, p\} = 2q$, on déduit de A et B que :

$$[\widetilde{Op}(q^2) - Q^2, P] = [\widetilde{Op}(q^2), P] - [Q^2, P] = i\hbar\left(\{q^2, p\} - \{q^2, p\}\right) = 0 \tag{45}$$

$$[\widetilde{Op}(q^2) - Q^2, q] = [\widetilde{Op}(q^2), Q] = i\hbar\{q^2, q\} = 0 \tag{46}$$

De même, $[\widetilde{Op}(p^2) - P^2, Q] = [\widetilde{Op}(p^2) - P^2, P] = 0$. Il existe donc T_1 et T_2 dans $\mathcal{L}(S(\mathbb{R}))$, auto-adjoints (par la condition C) et commutant avec P et Q tels que :

$$\widetilde{Op}(q^2) = Q^2 + T_1 \tag{47}$$

$$\widetilde{Op}(p^2) = P^2 + T_2 \tag{48}$$

D'après le lemme 1.1, il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que $T_i = c_i\mathrm{Id}$, $i = 1, 2$. L'idée est d'exprimer les éléments de la base canonique sous forme de crochets de Poisson pour annuler les constantes T_i grâce aux crochets de Lie.
On sait que $\{q^2, p^2\} = 4qp$, donc :

$$\begin{aligned}
4\widetilde{Op}(qp) &= \widetilde{Op}\left(\{q^2, p^2\}\right) && (49)\\
&= \frac{1}{i\hbar}[Q^2 + T_1, P^2 + T_2] && (50)\\
&= \frac{1}{i\hbar}\left([Q^2, T_2] + [P^2, T_1] + [Q^2, P^2] + [T_1, T_2]\right) && (51)\\
&= \frac{1}{i\hbar}[Q^2, P^2] && (52)\\
&= 4Op(qp) && (53)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\widetilde{Op}(qp) = Op(qp)$.
On sait que $\{qp, q^2\} = -2q^2$, en utilisant le fait que $\widetilde{Op}(qp) = Op(qp)$ on montre :

$$\begin{aligned}
-2\widetilde{Op}(q^2) &= \widetilde{Op}\left(\{qp, q^2\}\right) && (54)\\
&= \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{1}{2}(QP + PQ), Q^2 + T_1\right] && (55)\\
&= \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{1}{2}(QP + PQ), Q^2\right] && (56)\\
&= Op\left(\{qp, q^2\}\right) && (57)\\
&= -2Op(q^2) && (58)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\widetilde{Op}(q^2) = Op(q^2)$, ce qui montre que $T_1 = 0$. En utilisant $2p^2 = \{qp, p^2\}$, on montre de même que $T_2 = 0$. Cela conclut la démonstration. □

Cependant la quantification exacte s'arrête là. On note $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes en p et q, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.2 (Groenwold-van Hove)**.** *Il n'existe pas d'application linéaire $Op : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{L}(S(\mathbb{R}))$ vérifiant les conditions $A - B - C$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant qu'on dispose d'une telle application linéaire.

Première étape : montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $Op(p^n) = P^n$ et que $Op(q^n) = Q^n$. Comme on l'a vu, le cas $n = 0$ est une conséquence de la condition A. La condition B constitue l'initialisation à $n = 1$. Pour l'hérédité nous allons avoir besoin de $Op(qp)$. Pour calculer cette expression nous allons utiliser l'identité $4qp = \{q^2, p^2\}$; il nous faut donc une expression simple de $Op(p^2)$ et de $Op(q^2)$q. On a :

$$[Op(pq^2), Q] = i\hbar Op\left(\{q^2, q\}\right) = [Q^2, Q] \quad (59)$$

$$[Op(pq^2), P] = i\hbar Op\left(\{q^2, p\}\right) = 2i\hbar Op(q) = 2i\hbar Q = [Q^2, P] \quad (60)$$

Il existe donc T_1 auto-adjoint et commutant avec P et Q tels que $Op(q^2) = Q^2 + T_1$. De même il existe T_2 auto-adjoint et commutant avec P et Q tels que $Op(p^2) = P^2 + T_2$. D'après le lemme 1.1, T_1 et T_2 sont des homothéties. On a donc :

$$\begin{aligned}
4Op(qp) &= \frac{1}{i\hbar}[Op(p^2), Op(q^2)] && (61)\\
&= \frac{1}{i\hbar}[P^2 + T_2, Q^2 + T_1] && (62)\\
&= \frac{1}{i\hbar}[Q^2, P^2] && (63)\\
&= 2(QP + PQ) && (64)
\end{aligned}$$

On a donc $Op(qp) = \frac{1}{2}(QP + PQ)$. Avec ce résultat, on peut prouver l'hérédité de la récurrence : supposons que $Op(p^n) = P^n$ et que $Op(q^n) = Q^n$. On part de l'identité $(n+1)q^n = \{q^{n+1}, p\}$:

$$(n+1)Op(q^n) = \frac{1}{i\hbar}[Op(\{q^{n+1}, p\}), P] = (n+1)Q^n \quad (65)$$

La dernière égalité est due à l'hypothèse de récurrence. Un calcul direct montre que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $[Q^m, P] = mi\hbar Q^{m-1}$, on a donc $[Op(q^{n+1}) - Q^{n+1}, P] = 0$. De même,

$$[Op(q^{n+1}) - Q^{n+1}, Q] = i\hbar Op\left(\{q^{n+1}, q\}\right) - [Q^{n+1}, Q] = 0 \tag{66}$$

Il existe donc T auto-adjoint et commutant avec P et Q tel que $Op(q^{n+1}) = Q^{n+1} + T$. D'après le lemme 1.1, T est une homothétie.
On utilise maintenant l'identité $(n+1)q^{n+1} = \{q^{n+1}, qp\}$:

$$\begin{aligned}
(n+1)Op(q^{n+1}) &= \frac{1}{i\hbar}\left[Q^{n+1} + T, \frac{1}{2}(QP + PQ)\right] &(67)\\
&= \frac{1}{2i\hbar}\left(Q^{n+2}P - QPQ^{n+1} + Q^{n+1}PQ - PQ^{n+2}\right) &(68)\\
&= \frac{1}{2i\hbar}\left(Q[Q^{n+1}, P] + [Q^{n+1}, P]Q\right) &(69)\\
&= (n+1)Q^{n+1} &(70)
\end{aligned}$$

Cela montre que $Op(q^{n+1}) = Q^{n+1}$. On montre de même que $Op(p^{n+1}) = P^{n+1}$.

Deuxième étape : nous allons montrer que $T = i\hbar Op\left(\{q^3, p^3\} - 3\{q^2p, p^2q\}\right) \neq 0$ alors qu'un calcul direct montre que $\{q^2p, p^2q\} = \frac{1}{3}\{q^3, p^3\}$. En utilisant le résultat de l'étape précédente :

$$\begin{aligned}
i\hbar Op\left(\{q^2p, p^2q\}\right) &= [Op(q^2p), Op(p^2q)] &(71)\\
&= -\frac{1}{12}\left[Op\left(\{q^3, p^2\}\right), Op\left(\{p^3, q^2\}\right)\right] &(72)\\
&= -\frac{1}{12i\hbar}\left[[Q^3, P^2], [P^3, Q^2]\right] &(73)\\
&= \frac{1}{4}[Q^2P + PQ^2, QP^2 + P^2Q] &(74)
\end{aligned}$$

On a donc $T = [Q^3, P^3] - \frac{3}{4}[Q^2P + PQ^2, QP^2 + P^2Q]$. Un calcul montre que

$$[Q, [Q, [P, [P, T]]]] = 24\hbar^4 \mathrm{Id} \tag{75}$$

Ce calcul implique que T est non-nul ; on a donc abouti à une contradiction ; le théorème est prouvé. □

Si on veut élargir notre classe d'observables classiques, nous devons donc assouplir les conditions $A - B - C$. Nous allons voir tout au long de ce mémoire qu'assouplir seulement la condition A suffit à obtenir des résultats. Au lieu d'avoir l'égalité $[Op(f), Op(g)] = -i\hbar Op\left(\{f, g\}\right)$, nous allons demander une majoration en fonction de $\hbar$ de $\| [Op(f), Op(g)] + i\hbar Op\left(\{f, g\}\right) \|_{Op}$.

2 La quantification Toeplitz

En mécanique quantique, on considère souvent les opérateurs création et annihilation, définis par :

$$Z = \frac{Q - iP}{\sqrt{2}} \tag{76}$$

$$\overline{Z} = \frac{Q + iP}{\sqrt{2}} \tag{77}$$

On remarque que $\left[Z, \bar{Z}\right] = -\hbar$, le théorème de Stone-Von Neumann nous donne alors l'intuition de quantifier les fonctions de z et de $\overline{z}$ plutôt que les fonctions de q et p ; où on pose $z = \frac{q-ip}{\sqrt{2}}$ et $\overline{z} = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$. Le but va être de quantifier la fonction z par l'opérateur multiplication par z et $\overline{z}$ par l'opérateur $\hbar\frac{d}{dz}$.

Nous commençons par quantifier l'espace des polynômes en z et $\overline{z}$, c'est-à-dire $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$; c'est l'objet de la partie 2.1. Ensuite nous verrons comment définir de manière "analytique" une quantification pour les fonctions de la variable complexe ; c'est l'objet de la partie 2.2.

2.1 Les quantifications Wick et anti-Wick

Comme nous allons travailler sur des polynômes, nous renommons les opérateurs P et Q pour éviter les conflits de notations ; nous posons aussi $\hbar = 1$. On considère A, $B \in \mathrm{End}(\mathbb{C}[u])$ définis par :

$$(AP)(u) = uP(u) \tag{78}$$

$$(BP) = P' \tag{79}$$

Un calcul simple mais fondamental montre que $[A, B] = -\mathrm{Id}$. On définit :

$$\mathcal{P} = \mathrm{Vect}\left(A^{k_1}B^{l_1}\dots A^{k_n}B^{l_n},\, n \in \mathbb{N},\, k_i, l_i \geq 0\right) \tag{80}$$

Définition 2.1. *On définit les opérateurs linéaires Op_W, $Op_{aW} : \mathbb{C}[z, \overline{z}] \longrightarrow \mathcal{P}$ par :*

$$Op_W\left(z^n\overline{z}^m\right) = A^nB^m \tag{81}$$

$$Op_{aW}\left(z^n\overline{z}^m\right) = B^nA^m \tag{82}$$

Notre premier but va être de montrer que ces deux opérateurs linéaires sont des isomorphismes.

Si k et l sont des n-uplets à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose $f(k, l) = A^{k_1}B^{l_1}\dots A^{k_n}B^{l_n}$. On définit aussi $\mathcal{P}_N = \mathrm{Vect}\left(f(k, l),\, |k| + |l| \leq N\right)$. On a alors $\mathcal{P} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_N$. Nous commençons par donner une base simple de $\mathcal{P}_N$. Nous aurons besoin des deux lemmes techniques suivants :

Lemme 2.1. $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$, $\left[A^n, B^k\right] \in \mathcal{P}_{n+k-2}$.

Démonstration. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$:
- $k = 1$: soit $n \in \mathbb{N}^*$, un calcul direct donne $[A^n, B] = -nA^{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$.

— si c'est vrai pour $i \in [1, k]$, où $k \in \mathbb{N}^*$: soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\left[A^n, B^{k+1}\right] &= A^n B^{k+1} - B^{k+1} A^n && (83)\\
&= A^n B^{k+1} - B^k A^n B + B^k A^n B - B^{k+1} A^n && (84)\\
&= \left[A^n, B^k\right] B + B^k \left[A^n, B\right] && (85)\\
&= \left[A^n, B^k\right] B - n B^k A^{n-1} && (86)
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, le premier terme est dans $\mathcal{P}_{n+k-1}$, ainsi que le deuxième par construction. Donc $\left[A^n, B^{k+1}\right] \in \mathcal{P}_{n+k-1} = \mathcal{P}_{n+(k+1)-2}$.

□

Lemme 2.2. $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$, $[B^q, A^p] = \sum_{k=1}^{\min(p,q)} \binom{q}{k} \frac{p!}{(p-k)!} A^{p-k} B^{q-k}$.

Démonstration. On applique la formule de Leibniz. □

Proposition 2.1. *Les familles suivantes sont des bases de* $\mathcal{P}_N$: $\mathcal{A}_N = \left(A^n B^l,\, n + l \leq N\right)$ *et* $\mathcal{B}_N = \left(B^n A^l,\, n + l \leq N\right)$.

Démonstration. Première étape : montrons que la famille $\mathcal{A}_N$ est libre : pour cela montrons que $\left(A^n B^l,\, n \leq N,\, l \leq N\right)$ est libre, cela conclura vu que $\mathcal{A}_N$ en est une sous-famille. Si $(p_{n,l})$ sont tels que $\sum_{n,l=0}^{N} p_{n,l} A^n B^l = 0$. Si $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n B^l(z^k) = \mathbf{1}_{\{\leq k\}}(l) \frac{k!}{(k-l)!} z^{k-l+n}$. Montrons alors par récurrence sur $k \leq N$ que $p_{n,k} = 0$ pour tout $n \leq N$:

— $k = 0$, on évalue en le polynôme constant égal à 1, on obtient $\sum_{j=0}^{N} p_{j,0} z^j = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc pour tout $j \leq N$, $p_{j,0} = 0$.

— si c'est vrai jusqu'au rang $n \leq N - 1$, en évaluant en z^n, on obtient $\sum_{j=0}^{N} p_{j,n+1} z^j = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc pour tout $j \leq N$, $p_{j,n+1} = 0$.

Cela montre que $\mathcal{A}_N$ est une famille libre.

Deuxième étape : montrons que les deux familles sont génératrices par récurrence sur N :

— si $N = 0$, $\mathcal{P}_0 = \mathrm{Vect}(1)$ donc c'est bon.

— si c'est vrai au rang $0, 1, \ldots, N \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k, l \in \mathbb{N}^n$ tels que $|k| + |l| = N + 1$. On pose $f(k, l) = A^{k_1} B^{l_1} \ldots A^{k_n} B^{l_n}$. Quitte à modifier la valeur de n, on peut supposer que k_n ou l_n est non nul. On distingue donc deux cas :

1. Si $l_n = 0$ et $k_n \neq 0$: on a $f(k, l) = \left(A^{k_1} B^{l_1} \ldots A^{k_{n-1}} B^{l_{n-1}}\right) A^{k_n}$. Le terme entre parenthèses appartient à $\mathcal{P}_{N-k_n+1}$ et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
f(k, l) &= \sum_{p+q \leq N+1-k_n} a_{pq} A^p B^q A^{k_n} && (87)\\
&= \sum_{p+q \leq N+1-k_n} b_{pq} B^p A^{q+k_n} && (88)
\end{aligned}$$

L'expression (88) permet de conclure pour la famille $\mathcal{B}_{N+1}$. Pour la famille $\mathcal{A}_{N+1}$, on repart de la première expression :

$$f(k, l) = \sum_{p+q \leq N-k_n} a_{pq} A^p B^q A^{k_n} + \sum_{p+q = N+1-k_n} a_{pq} A^p B^q A^{k_n} \tag{89}$$

La première somme est un élément de $\mathcal{P}_N$ donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Pour la deuxième somme, on utilise le lemme 2.2 : il nous dit que $B^q A^{k_n} \in \mathrm{Vect}\left(A^n B^l,\, n + l \leq q + k_n\right)$, donc $A^p B^q A^{k_n} \in \mathrm{Vect}\left(A^n B^l,\, n + l \leq p + q + k_n\right)$ qui est égal à $\mathrm{Vect}\left(A^n B^l,\, n + l \leq N + 1\right)$ (par hypothèse sur les indices), ce qui conclut.

2. Si $l^n \neq 0$: dans $f(k,l)$, on remplace $A^{k_n}B^{l_n}$ par $\left[A^{k_n}, B^{l_n}\right] + B^{l_n}A^{k_n}$:

$$f(k,l) = A^{k_1}B^{l_1}\dots A^{k_{n-1}}B^{l_{n-1}+l_n}A^{k_n} + A^{k_1}B^{l_1}\dots A^{k_{n-1}}B^{l_{n-1}}\left[A^{k_n}, B^{l_n}\right] \tag{90}$$

Le lemme 2.1 nous dit que le deuxième terme appartient à $\mathcal{P}_{N-1}$ et on lui applique l'hypothèse de récurrence ; pour le premier terme, on se ramène au cas où $l_n = 0$.

Troisième étape : on vient de montrer que $\mathcal{A}_N$ est génératrice et libre, c'est donc une base de $\mathcal{P}_N$. La famille $\mathcal{B}_N$ a le même cardinal que $\mathcal{A}_N$ et elle est génératrice, c'est aussi une base de $\mathcal{P}_N$. □

On peut maintenant énoncer les corollaires justifiant ce qui précède :

Corollaire 2.1. *$\mathcal{P}$ admet comme bases les deux familles suivantes :* $\left(A^nB^l,\, n,l \in \mathbb{N}\right)$ *et* $\left(B^nA^l,\, n,l \in \mathbb{N}\right)$.

Corollaire 2.2. *Les opérateurs Op_W et Op_{aW} sont des isomorphismes.*

Démonstration. D'après le corollaire précédent, ils envoient une base sur une base, ce qui conclut. □

Nous allons nous intéresser à la loi de composition pour ces deux quantifications. Nous n'effectuerons les calculs que pour la quantification Wick, et jusqu'à nouvel ordre, Op désignera Op_W. Dans $\mathcal{P}$, le produit interne est la composition ; par bijectivité de Op, nous pouvons le ramener dans $\mathbb{C}[z,\overline{z}]$ et définir l'opération $*$ par :

$$P * Q = Op^{-1}\left(Op(P)Op(Q)\right) \tag{91}$$

Le but de cette partie est de déterminer la loi $*$. Nous allons montrer qu'elle coïncide avec la loi $\triangle$ définie par :

$$P \triangle Q = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\partial_{\overline{z}}^n P\right)\left(\partial_z^n Q\right) \tag{92}$$

Cette somme est bien définie car P et Q sont des polynômes. Montrons donc que $P * Q = P \triangle Q$, pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[z,\overline{z}]$.

Lemme 2.3. *La loi $\triangle$ est associative et $1 \in \mathbb{C}[z,\overline{z}]$ est l'élément neutre.*

Démonstration. On ne montre que l'associativité. Soient $P, Q, R \in \mathbb{C}[z,\overline{z}]$. On a :

$$P \triangle (Q \triangle R) = P \triangle \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\partial_{\overline{z}}^n Q\right)\left(\partial_z^n R\right) \tag{93}$$

$$= \sum_{n,m} \frac{1}{n!m!}\left(\partial_{\overline{z}}^n P\right)\left(\partial_z^m\left(\left(\partial_{\overline{z}}^n Q\right)\left(\partial_z^n R\right)\right)\right) \tag{94}$$

$$= \sum_{n,m,k\leq m} \frac{1}{n!k!(m-k)!}\left(\partial_{\overline{z}}^n P\right)\left(\partial_z^{m-k}\partial_{\overline{z}}^n Q\right)\left(\partial_z^{n+k} R\right) \tag{95}$$

$$= \sum_{n,p,q} \frac{1}{n!p!q!}\left(\partial_{\overline{z}}^{p+q} P\right)\left(\partial_z^q\partial_{\overline{z}}^n Q\right)\left(\partial_z^{n+q} R\right) \tag{96}$$

Le calcul de $(P \triangle Q) \triangle R$ s'effectue de la même façon et donne le même résultat. □

Lemme 2.4. *Si $P, Q \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$, on a les deux propriétés suivantes :*

1. *si $\partial_{\overline{z}} P = 0$, alors $\forall R \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$, $P \bigtriangleup R = PR = P * R$.*
2. *si $\partial_z Q = 0$, alors $\forall R \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$, $Q \bigtriangleup R = QR = Q * R$.*

Démonstration. On ne montre que la première propriété, la preuve de la deuxième étant identique. Montrons la première égalité, comme $\partial_{\overline{z}}^n P = 0$ si $n \geq 1$, la somme définissant $P \bigtriangleup R$ est réduite à son premier terme, qui est PR. Montrons la deuxième égalité, avec $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$; calculons :

$$Op(PR) = \sum_{n=0}^{N} a_n Op\left(z^n R(z, \overline{z})\right) \tag{97}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n Op(z^n) Op(R(z, \overline{z})) \tag{98}$$

$$= Op(P) Op(R) \tag{99}$$

Pour la deuxième égalité, on a utilisé le fait suivant : $Op(z^n z^p \overline{z}^q) = A^n A^p B^q = Op(z^n) Op(z^p \overline{z}^q)$. On a donc $Op(P * R) = Op(PR)$, ce qui implique ce que nous voulons par bijectivité de Op. □

Lemme 2.5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z}^n \bigtriangleup z = \overline{z}^n * z$

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ (pour $n = 0$ cela résulte simplement du fait que 1 est l'élément neutre pour les lois $\bigtriangleup$ et $*$) :

— $n = 1$: on a premièrement :

$$\overline{z} * z = Op^{-1}(BA) \tag{100}$$

$$= Op^{-1}(AB + \mathrm{Id}) \tag{101}$$

$$= z * \overline{z} + 1 \tag{102}$$

$$= z\overline{z} + 1 \tag{103}$$

La dernière égalité est due au lemme 2.4. Un calcul direct donne $\overline{z} \bigtriangleup z = \overline{z}z + 1$. On a bien l'égalité $\overline{z} \bigtriangleup z = \overline{z} * z$.

— on suppose que l'égalité est vraie jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}^*$; on a premièrement :

$$\overline{z}^{n+1} \bigtriangleup z = \overline{z}^n \bigtriangleup \overline{z} \bigtriangleup z \tag{104}$$

$$= \overline{z}^n \bigtriangleup (z\overline{z} + 1) \tag{105}$$

$$= \overline{z}^n + \overline{z}^n \bigtriangleup z \bigtriangleup \overline{z} \tag{106}$$

$$= \overline{z}^n + (\overline{z}^n * z) \bigtriangleup \overline{z} \tag{107}$$

La première égalité est due à l'associativité, la deuxième à l'hypothèse de récurrence au rang 1, la troisième au lemme 2.4, la quatrième à l'hypothèse de récurrence au rang n. D'au autre côté :

$$\overline{z}^{n+1} * z = \overline{z}^n * \overline{z} * z \tag{108}$$

$$= \overline{z}^n * (z\overline{z} + 1) \tag{109}$$

$$= \overline{z}^n + (\overline{z}^n * z) \bigtriangleup \overline{z} \tag{110}$$

La deuxième égalité est due à l'hypothèse de récurrence au rang 1, la troisième au lemme 2.4. Finalement on a bien $\overline{z}^{n+1} \bigtriangleup z = \overline{z}^{n+1} * z$, ce qui conclut la récurrence.

$\square$

Un dernier lemme pour la route :

Lemme 2.6. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$, $P \bigtriangleup z^n = P * z^n$.

Démonstration. On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en fixant $P \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$:

— $n = 1$, il s'agit du lemme précédent sachant que P est combinaison linéaire d'élément de la forme $z^n \overline{z}^m$ que l'on peut réécrire $z^n * \overline{z}^m$ ou $z^n \bigtriangleup \overline{z}^m$ d'après le lemme (2.4).

— on suppose l'égalité vraie jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P \bigtriangleup z^{n+1} = P \bigtriangleup z^n \bigtriangleup z \tag{111}$$
$$= (P * z^n) \bigtriangleup z \tag{112}$$
$$= (P * z^n) * z \tag{113}$$
$$= P * z^{n+1} \tag{114}$$

La première égalité est due à l'associativité, la deuxième à l'hypothèse de récurrence au rang n et la troisième à l'hypothèse de récurrence au rang 1 appliquée à $P * z^n$. Cela conclut la récurrence.

$\square$

Fort de tous ces lemmes, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Les deux lois sont égales, c'est-à-dire :*

$$\forall P, Q \in \mathbb{C}[z, \overline{z}], P \bigtriangleup Q = P * Q \tag{115}$$

Démonstration. Il suffit de le montrer pour les éléments de la forme $z^n \overline{z}^m$. Soit $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. On calcule directement :

$$z^p \overline{z}^q \bigtriangleup z^n \overline{z}^m = z^p \bigtriangleup \overline{z}^q \bigtriangleup z^n \bigtriangleup \overline{z}^m \tag{116}$$
$$= z^p \bigtriangleup (\overline{z}^q \bigtriangleup z^n) \bigtriangleup \overline{z}^m \tag{117}$$
$$= z^p \bigtriangleup (\overline{z}^q * z^n) \bigtriangleup \overline{z}^m \tag{118}$$
$$= z^p * (\overline{z}^q * z^n) * \overline{z}^m \tag{119}$$
$$= (z^p * \overline{z}^q) * (z^n * \overline{z}^m) \tag{120}$$
$$= z^p \overline{z}^q * z^n \overline{z}^m \tag{121}$$

La première égalité est due au lemme 2.4, la deuxième à l'associativité de $\bigtriangleup$, la troisième au lemme 2.6, la quatrième au lemme 2.4, la cinquième à l'associativité de $*$ et la sixième au lemme 2.4. $\square$

On note $*_W$ la nouvelle loi interne de $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$. On peut effectuer les mêmes calculs pour la quantification anti-Wick et obtenir une loi interne $*_{aW}$. En définissant l'opérateur B par $\hbar P'$ au lieu de P', ces deux lois sont données par :

$$P *_W Q = \sum_{n \geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} (\partial_{\overline{z}}^n P) (\partial_z^n Q) \tag{122}$$

$$P *_{aW} Q = \sum_{n \geq 0} \frac{(-\hbar)^n}{n!} (\partial_z^n P) (\partial_{\overline{z}}^n Q) \tag{123}$$

On cherche maintenant le lien entre les deux quantifications, c'est-à-dire l'application linéaire $\psi : \mathbb{C}[z, \overline{z}] \longrightarrow \mathbb{C}[z, \overline{z}]$ définie par $\psi = Op_{aW}^{-1} \circ Op_W$. Cette application vérifie :

— $\psi_{|\mathbb{C}[z]} = \mathrm{Id}_{|\mathbb{C}[z]}$
— $\psi_{|\mathbb{C}[\overline{z}]} = \mathrm{Id}_{|\mathbb{C}[\overline{z}]}$
— $\psi\left(P *_W Q\right) = \psi(P) *_{aW} \psi(Q)$

Proposition 2.3.

$$\forall P \in \mathbb{C}[z,\overline{z}],\ \psi(P) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\left(\partial_z \partial_{\overline{z}}\right)^n P\right) \tag{124}$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que la somme est finie car P est un polynôme. On définit l'application linéaire ϕ de $\mathbb{C}[z,\overline{z}]$ par $\phi(P) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\left(\partial_z \partial_{\overline{z}}\right)^n P\right)$. Montrons que $\psi = \phi$. Si $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \psi(z^n \overline{z}^m) &= \psi\left(z^n *_W \overline{z}^m\right) && (125)\\ &= \psi(z^n) *_{aW} \psi(\overline{z}^m) && (126)\\ &= z^n *_{aW} \overline{z}^m && (127) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \phi(z^n \overline{z}^m) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\left(\partial_z \partial_{\overline{z}}\right)^k z^n \overline{z}^m\right) && (128)\\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\partial_z^k z^n\right)\left(\partial_{\overline{z}}^k \overline{z}^m\right) && (129)\\ &= z^n *_{aW} \overline{z}^m && (130) \end{aligned}$$

Les applications ϕ et ψ coïncident sur une base de $\mathbb{C}[z,\overline{z}]$ et sont donc égales. □

2.2 L'espace de Bargmann

Dans cette partie nous allons adopter un point de vue plus analytique sur la quantification. Nous allons définir la quantification Toeplitz, qui coïncide pour les polynômes avec la quantification anti-Wick.

2.2.1 Le noyau reproduisant

Soit $\alpha : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive. On note $L^2(\mathbb{C},\alpha)$ l'espace des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de carré intégrable contre le poids α, c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{C},\alpha)} = \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z)\alpha(z)\mathrm{d}z$. On définit $HL^2(\mathbb{C},\alpha)$ comme l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{C},\alpha)$ holomorphes.

Proposition 2.4. $\forall z \in \mathbb{C}, \forall R > 0, \exists C_{R,z} > 0, \forall v \in D(z,R), \forall f \in HL^2(\mathbb{C},\alpha)$

$$|f(v)| \leq C_{R,z} \|f\|_{L^2(\mathbb{C},\alpha)} \tag{131}$$

où $D(z,R)$ est le disque ouvert de centre z et de rayon R.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Si $f \in HL^2(\mathbb{C},\alpha)$, f est développable en série entière en tout $v \in D(z,R)$ et cette série converge uniformément sur $K = \overline{D(z,2R)}$. Soit $v \in D(z,R)$, on a :

$$\forall w \in D(z,2R), f(w) = f(v) + \sum_{n\geq 1} a_n (w-v)^n \tag{132}$$

On a $D(z,R) \subset K$ et par convergence uniforme on peut intervertir somme et intégrale :

$$\int_{D(z,R)} f(w)\mathrm{d}w = \pi R^2 f(v) + \sum_{n\geq 1} a_n \int_{D(v,R)} (w-v)^n \mathrm{d}w \tag{133}$$

Dans la somme du membre de droite, les intégrales sont toutes nulles car $n \neq 0$. Donc pour tout v dans $D(z,R)$:

$$\pi R^2 f(v) = \int_{D(z,R)} f(w)\mathrm{d}w = \langle \mathbf{1}_{D(v,R)}\alpha^{-1}, f\rangle_{L^2(\mathbb{C},\alpha)} \tag{134}$$

Par Cauchy-Schwartz dans $L^2(\mathbb{C},\alpha)$:

$$\forall v \in D(z,R), \pi R^2 |f(v)| \leq \|\mathbf{1}_{D(v,R)}\alpha^{-1}\|_{L^2(\mathbb{C},\alpha)} \times \|f\|_{L^2(\mathbb{C},\alpha)} \tag{135}$$

Or α^{-1} est continue sur le compact K donc $\|\mathbf{1}_{D(v,R)}\alpha^{-1}\|_{L^2(\mathbb{C},\alpha)} \leq \|\alpha^{-1}\|_{\infty,K}$. On choisit $C_{R,z} = \frac{\|\alpha^{-1}\|_{\infty,K}}{\pi R^2}$ □

Ce résultat signifie qu'on peut contrôler la valeur en un point par la norme L^2, et ce de manière uniforme autour de ce point ; il a les deux conséquences suivantes :

Proposition 2.5. *$HL^2(\mathbb{C},\alpha)$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{C},\alpha)$, ce qui en fait un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit par $L^2(\mathbb{C},\alpha)$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $HL^2(\mathbb{C},\alpha)$ convergeant dans $L^2(\mathbb{C},\alpha)$ vers f. Montrons que f est holomorphe. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy et par la proposition 2.4, si $z \in \mathbb{C}$ et $R > 0$:

$$\sup_{v\in D(z,R)} |f_n(v) - f_m(v)| \leq C_{R,z}\|f_n - f_m\|_{L^2(\mathbb{C},\alpha)} \tag{136}$$

Donc $(f_n)_{n\geq 1}$ converge localement uniformément vers une fonction qui ne peut être que f. Comme les f_n sont holomorphes, f est holomorphe au voisinage de chaque point donc holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. □

Dans la suite, on omettra de préciser dans quel espace est effectué un produit scalaire ou dans quel espace est prise une norme, on se placera toujours dans $HL^2(\mathbb{C},\alpha)$.

Proposition 2.6. *Il existe une fonction $K : \mathbb{C}^2 \longmapsto \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :*

1. *$K(z,w)$ est holomorphe en z et anti-holomorphe en w et $K(w,z) = \overline{K(z,w)}$*
2. *Si $z \in \mathbb{C}$, $\int_{\mathbb{C}} K(z,w)\alpha(w)\mathrm{d}w < +\infty$ et si $f \in HL^2(\mathbb{C},\alpha)$, on a*

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}} K(z,w)f(w)\alpha(w)\mathrm{d}w \tag{137}$$

3. *Soit P le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{C},\alpha)$ sur $HL^2(\mathbb{C},\alpha)$, alors pour tout f dans $L^2(\mathbb{C},\alpha)$ et z dans $\mathbb{C}$ on a*

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{C}} K(z,w)f(w)\alpha(w)\mathrm{d}w \tag{138}$$

4. *Si $z \in \mathbb{C}$, alors pour tout f dans $HL^2(\mathbb{C},\alpha)$ on a*

$$|f(z)|^2 \leq K(z,z)\|f\|^2 \tag{139}$$

et il existe une fonction non nulle de $HL^2(\mathbb{C},\alpha)$ qui vérifie l'égalité.

5. *Si $z \in \mathbb{C}$ et si une fonction f_z de $HL^2(\mathbb{C}, \alpha)$ vérifie*

$$\forall g \in HL^2(\mathbb{C}, \alpha), g(z) = \int_{\mathbb{C}} \overline{f_z(w)} g(w) \alpha(w) \mathrm{d}w \tag{140}$$

alors $\overline{f_z(w)} = K(z, w)$ pour tout w dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Point 1 et 2 :
Par la proposition 2.4, les formes linéaires $f \longmapsto f(z)$ sont continues sur $HL^2(\mathbb{C}, \alpha)$ qui est un espace de Hilbert donc par le théorème de représentation de Riesz, pour tout z dans $\mathbb{C}$, il existe $\phi_z \in HL^2(\mathbb{C}, \alpha)$ telle que pour tout f dans $HL^2(\mathbb{C}, \alpha)$, $f(z) = \langle \phi_z, f \rangle$. On pose alors $K(z, w) = \overline{\phi_z(w)}$. On a de plus $\phi_z(w) = \langle \phi_w, \phi_z \rangle = \overline{\langle \phi_z, \phi_w \rangle} = \overline{\phi_w(z)}$ ce qui implique $K(w, z) = \overline{K(z, w)}$. Cela nous donne bien l'holomorphie en z et l'anti-holomorphie en w de $(z, w) \longmapsto K(z, w)$.

Point 3 :
Si $f \in HL^2(\mathbb{C}, \alpha)$, on a $Pf = f$ et par le point 2 la formule est correcte. Si $f \in HL^2(\mathbb{C}, \alpha)^{\perp}$, alors $\langle \phi_z, f \rangle = 0$ pour tout z ce qui implique que $\int_{\mathbb{C}} K(z, w) f(w) \alpha(w) \mathrm{d}w = 0$ pour tout z, ainsi la formule proposée est aussi correcte.

Point 4 :
Par Cauchy-Schwartz, si $f \in HL^2(\mathbb{C}, \alpha)$, alors $|f(z)| \leq \|\phi_z\|^2 \times \|f\|^2$. Or $\|\phi_z\|^2 = \sqrt{\phi_z(z)} = \sqrt{K(z, z)}$ ce qui conclut. Pour le cas d'égalité, prendre $f = \phi_z$.

Point 5 :
Si f est comme dans l'énoncé, alors $\langle \overline{K(z, .)} - f, g \rangle = 0$ pour tout g dans $HL^2(\mathbb{C}, \alpha)$, donc $f = \overline{K(z, .)}$. □

La fonction K s'appelle le noyau reproduisant de $HL^2(\mathbb{C}, \alpha)$, le terme reproduisant vient du point 2 de la proposition précédente.

2.2.2 L'espace de Bargmann et la quantification Toeplitz

Soit $\mu_\hbar(z) = \frac{1}{\pi \hbar} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}}$. L'espace de Bargmann est défini par $B_\hbar = HL^2(\mathbb{C}, \mu_\hbar)$.

Proposition 2.7. *Si $e_j(z) = \frac{z^j}{\sqrt{j! \hbar!}}$, alors $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $B_\hbar$.*

Démonstration. Première étape : montrons que $(z \mapsto z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $B_\hbar$. Si $m \neq n$:

$$\langle z \mapsto z^n, z \mapsto z^m \rangle_{B_\hbar} = \int_{\mathbb{C}} \overline{z}^n z^m \mu_\hbar \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}+} r^{n+m+1} e^{i\theta(n-m)} \frac{e^{-\frac{r^2}{\hbar}}}{\pi \hbar} \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \tag{141}$$

$$= \int_{\mathbb{R}+} \frac{r^{n+m+1} e^{-\frac{r^2}{\hbar}}}{\pi \hbar} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r = 0 \tag{142}$$

C'est la condition $m \neq n$ qui implique que $\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} \mathrm{d}\theta = 0$.

Montrons que $(z \mapsto z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $B_\hbar$ en montrant que $\{z \longmapsto z^n, \, n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$. Soit $f \in B_\hbar$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle z^n, f \rangle_{B_\hbar} = 0$. On développe f en série au voisinage de 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n. \tag{143}$$

Cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\langle z^n, f\rangle_{B_\hbar} = \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{-in\theta} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-\frac{r^2}{\hbar}} \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\pi\hbar} \tag{144}$$

Par convergence dominée, $\langle z^n, f\rangle_{B_\hbar} = \lim_{R\to+\infty} g(R)$, où on a posé, pour R un réel positif :

$$g(R) = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{-in\theta} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-\frac{r^2}{\hbar}} \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\pi\hbar} \tag{145}$$

Par convergence uniforme sur le compact $\overline{D(0,R)}$ du développement en série entière de f en 0, on intervertit série et intégrale :

$$\begin{aligned} g(R) &= \sum_{m\geq 1} c_m \int_0^R \int_0^{2\pi} r^{n+m+1} e^{in\theta(m-n)} e^{-\frac{r^2}{\hbar}} \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\pi\hbar} && (146)\\ &= \sum_{m\geq 1} c_m \int_0^R r^{n+m+1} \frac{e^{-\frac{r^2}{\hbar}}}{\pi\hbar} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)}\mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}r && (147)\\ &= 2\pi c_n \int_0^R r^{2n+1} \frac{e^{-\frac{r^2}{\hbar}}}{\pi\hbar} \mathrm{d}r && (148)\end{aligned}$$

Toujours par convergence dominée, on fait tendre R vers $+\infty$ et on en déduit que :

$$\langle z^n, f\rangle_{B_\hbar} = \frac{2c_n}{\hbar} \int_{\mathbb{R}_+} r^{2n+1} e^{-\frac{r^2}{\hbar}} \mathrm{d}r \tag{149}$$

Or $\langle z^n, f\rangle_{B_\hbar} = 0$ par hypothèse sur f, ce qui implique que $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela nous montre que $\left(\frac{z^n}{\|z^n\|_{B_\hbar}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $B_\hbar$.

Deuxième étape : calculons $\|z^n\|_{B_\hbar}$. Si $n = 0$, on calcule :

$$\|1\|_{B_\hbar}^2 = \int_{\mathbb{C}} \mu_\hbar(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{\pi\hbar} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{\hbar}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{\hbar}\left[\frac{\hbar}{2} e^{-\frac{r^2}{\hbar}}\right]_0^{+\infty} = 1 \tag{150}$$

Si $n \geq 1$, on effectue une intégration par partie :

$$\|z^n\|_{B_\hbar}^2 = \int_0^{+\infty} r^{2n} \frac{2}{\hbar} r e^{-\frac{r^2}{\hbar}} \mathrm{d}r = \left[-r^{2n} e^{-\frac{r^2}{\hbar}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{\hbar}} 2nr^{2n-1}\mathrm{d}r = n\hbar\|z^{n-1}\|_{B_\hbar}^2 \tag{151}$$

On peut donc montrer par récurrence immédiate que $\|z^n\|_{B_\hbar} = \sqrt{n!\hbar^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$. □

On peut maintenant calculer le noyau reproduisant de l'espace de Bargmann.

Proposition 2.8. *Le noyau reproduisant de $B_\hbar$ est donné par*

$$K(z,w) = \exp\left(\frac{z\overline{w}}{\hbar}\right) \tag{152}$$

Démonstration. Posons $f_z(w) = \exp\left(\frac{\bar{z}w}{\hbar}\right) = \sum_n e_n(w)\overline{e_n(z)}$. C'est bien une fonction de $B_\hbar$. Montrons qu'elle vérifie le point 5 de la proposition 2.6. Soit $g \in B_\hbar$:

$$\int_{\mathbb{C}} \overline{f_z(w)} g(w)\mu_\hbar(w)\mathrm{d}w = \int_{\mathbb{C}} \sum_n e_n(z)\overline{e_n(w)} g(w)\mu_\hbar(w)\mathrm{d}w \tag{153}$$

$$= \sum_n e_n(z) \int_{\mathbb{C}} \overline{e_n(w)} g(w)\mu_\hbar(w)\mathrm{d}w \tag{154}$$

$$= \sum_n e_n(z)\langle g, e_n\rangle \tag{155}$$

$$= g(z) \tag{156}$$

L'interversion série/intégrale est justifiée par :

$$\int_{\mathbb{C}} |g(w)| \sum_n \frac{|z^n w^n|}{n!\hbar^n}\mu_\hbar \mathrm{d}w = \int_{\mathbb{C}} |g(w)| e^{\frac{|zw|}{\hbar}} \mu_\hbar \mathrm{d}w < \infty \tag{157}$$

$\square$

Définition 2.2 (Quantification Toeplitz)**.** *Soit $P_\hbar$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{C}, \mu_\hbar)$ sur $B_\hbar$. La quantification Toeplitz d'une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{C})$ est l'opérateur $T_\hbar(f)$ suivant :*

$$\begin{array}{cccccc} T_\hbar(f) & : & B_\hbar & \longrightarrow & B_\hbar \\ & & \phi & \longmapsto & P_\hbar(f\phi) \end{array} \tag{158}$$

On va maintenant voir que la quantification Toeplitz coïncide avec la quantification anti-Wick pour les polynômes. L'espace $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ n'étant pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{C})$, on ne peut pas utiliser directement la définition précédente pour le quantifier. On va utiliser des fonctions plus régulières que celles de $B_\hbar$. On définit donc :

$$B_\hbar^\infty = \left\{ f \in B_\hbar \;\middle|\; |f(z)|^2 e^{-|z|^2} = O(|z|^{-N}),\ \forall N \right\} \tag{159}$$

Proposition 2.9. *Si $\psi \in B_\hbar^\infty$, on a :*

$$T_\hbar(z^n\overline{z}^m)\psi = \left(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^m (z^n\psi) \tag{160}$$

Démonstration. En prenant $\psi \in B_\hbar^\infty$, on s'est ramené à $z^n\overline{z}^m\psi \in L^2(\mathbb{C}, \mu_\hbar)$. On peut donc écrire :

$$T_\hbar(z^n\overline{z}^m)\psi(u) = \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{u\bar{v}}{\hbar}} \bar{v}^n v^m \psi(v)\mu_\hbar(v)\mathrm{d}v \tag{161}$$

De plus, par définition du noyau reproduisant :

$$u^n\psi(u) = \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{u\bar{v}}{\hbar}} v^n \psi(v)\mu_\hbar(v)\mathrm{d}v \tag{162}$$

On dérive m fois sous l'intégrale (ce qui est justifié par le fait que $\psi \in B_\hbar^\infty$) :

$$\left(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^m (u^n\psi)(u) = \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{u\bar{v}}{\hbar}} \bar{v}^n v^m \psi(v)\mu_\hbar(v)\mathrm{d}v \tag{163}$$

$\square$

2.3 Composition des symboles

Comme dans la partie 2.1, nous allons chercher la loi de composition pour la quantification Toeplitz. Comme la quantification Toeplitz est définie de manière analytique, on s'attend à obtenir un développement asymptotique en puissance de $\hbar$ de $T_\hbar(f)T_\hbar(g)$, alors que pour la quantification anti-Wick nous avions une expression exacte.

Si $f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$, on pose $|f|'_k = \sup_{x\in\mathbb{C}} |\partial^k f(x)|$. Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^N$, on définit aussi $|f,g|_N = \sum_{k=0}^N |f|'_k |g|'_{N-k}$. On note $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ dont les $|f|'_i$ sont finis pour $i \leq k$. C'est dans l'espace $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{C})$ que nous obtiendrons une expression de $T_\hbar(f)T_\hbar(g)$ intéressante pour le théorème d'Egorov.

2.3.1 Le théorème

La première étape est de se placer dans un espace plus commode que l'espace de Bargmann.

Lemme 2.7. *On a un isomorphisme d'espace de Hilbert $U_\hbar : B_\hbar \longrightarrow B_1$ définit par*

$$U_\hbar f(z) = \sqrt{\hbar} f\left(\sqrt{\hbar} z\right). \tag{164}$$

Démonstration. Le calcul suivant permet de conclure :

$$\int_{\mathbb{C}} |U_\hbar f(z)|^2 e^{-|z|^2} \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{C}} |f(u)|^2 e^{-\frac{|u|^2}{\hbar}} \mathrm{d}u \tag{165}$$

(on a effectué le changement de variable $u = \sqrt{\hbar} z$). □

Si $f \in L^\infty(\mathbb{C})$, on note $f_\hbar \in L^\infty(\mathbb{C})$ la fonction définie par $f_\hbar(z) = f\left(\sqrt{\hbar} z\right)$.

Lemme 2.8. *On a les deux propriétés suivantes :*
- $T_\hbar(f) = U_\hbar^* T_1(f_\hbar) U_\hbar$.
- *si cela a un sens,* $|f_\hbar|'_k = \sqrt{\hbar} |f|'_k$.

Démonstration. La deuxième propriété est évidente, démontrons la première. Soit ϕ et ψ dans $B_\hbar$, montrons que $\langle T_\hbar(f)\phi, \psi\rangle_{B_\hbar} = \langle U_\hbar^* T_1(f_\hbar) U_\hbar \phi, \psi\rangle_{B_\hbar}$. Par définition de l'adjoint, le deuxième terme est égal à :

$$\langle T_1(f_\hbar)U_\hbar\phi, U_\hbar\psi\rangle_{B_1} = \int_{\mathbb{C}} \Pi_1\left(f_\hbar U_\hbar \phi\right)(z)\overline{U_\hbar\psi(z)} e^{-|z|^2}\mathrm{d}z \tag{166}$$

$$= \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{z\overline{w}} f\left(\sqrt{\hbar}w\right)\sqrt{\hbar}\,\phi\left(\sqrt{\hbar}w\right) e^{-|w|^2}\mathrm{d}w\right)\sqrt{\hbar}\,\overline{\psi\left(\sqrt{\hbar}z\right)} e^{-|z|^2}\mathrm{d}z \tag{167}$$

$$= \hbar \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{z\overline{u}}{\sqrt{\hbar}}} f(u)\phi(u) e^{-\frac{|u|^2}{\hbar}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\hbar}}\right)\overline{\psi\left(\sqrt{\hbar}z\right)} e^{-|z|^2}\mathrm{d}z \tag{168}$$

$$= \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{v\overline{u}}{\hbar}} f(u)\phi(u) e^{-\frac{|u|^2}{\hbar}}\mathrm{d}u\right)\overline{\psi(v)} e^{-\frac{|v|^2}{\hbar}}\mathrm{d}v \tag{169}$$

$$= \int_{\mathbb{C}} \Pi_\hbar(f\phi)(v)\,\overline{\psi(v)} e^{-\frac{|v|^2}{\hbar}}\mathrm{d}v \tag{170}$$

$$= \langle T_\hbar(f)\phi, \psi\rangle_{B_\hbar} \tag{171}$$

□

On pose $B = \{f \in L^2(\mathbb{C},\mu), \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = -\frac{1}{2}zf(z)\}$. B est fermé dans $L^2(\mathbb{C},\mu)$ donc c'est un espace de Hilbert. On considère $A : B_1 \longrightarrow B$ définie par $Af(z) = f(z)e^{-\frac{|z|^2}{2}}$. Soit P la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{C},\mu)$ sur B. Si $f \in L^\infty(\mathbb{C})$, on définit l'opérateur $T(f) : B \longrightarrow B$ par $T(f)\phi = P(\phi f)$.

Lemme 2.9. *A est un isomorphisme d'espace de Hilbert et il vérifie* $T_1(f) = A^*T(f)A$.

Démonstration. L'opérateur A est clairement bijectif de B_1 sur $A(B_1)$. Montrons que $A(B_1) = B$:

— si $g = Af$ où $f \in B_1$, alors

$$\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z) = e^{-\frac{|z|^2}{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) - \frac{z}{2}f(z)\right) = -\frac{z}{2}e^{-\frac{|z|^2}{2}}f(z) \tag{172}$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant l'holomorphie de f, qui implique bien que $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$. Dans la dernière égalité, on reconnaît l'expression de g, qui vérifie donc $\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z) = -\frac{1}{2}zg(z)$. Montrons que g appartient à $L^2(\mathbb{C},\mu)$:

$$\int_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2}\mathrm{d}z < +\infty \tag{173}$$

— si $g \in B$, on pose $f(z) = g(z)e^{\frac{|z|^2}{2}}$, de telle sorte que $g = Af$, si $f \in B_1$. Montrons que $f \in B_1$: par le calcul d'intégrale précédent, on montre que $f \in L^2(\mathbb{C},\mu_1)$. Il reste à montrer que f est holomorphe :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = e^{\frac{|z|^2}{2}}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z) + g(z)\frac{z}{2}\right) = 0 \tag{174}$$

L'égalité $T_1(f) = A^*T(f)A$ se démontre de la même manière que l'égalité $T_\hbar(f) = U_\hbar^* T_1(f_\hbar)U_\hbar$. □

Les lemmes précédents nous permettent de travailler dans B plutôt que dans $B_\hbar$. Le but de cette partie est de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.1. $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_N > 0$, $\forall (f,g) \in \mathcal{C}_b^{2N}(\mathbb{C}) \times \mathcal{C}_b^N(\mathbb{C})$,

$$T(f)T(g) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k!} T\left(\left(\partial_z^k f\right)\left(\partial_{\bar z}^k g\right)\right) + R_N(f,g) \tag{175}$$

où $\|R_N(f,g)\|_{Op} \leq C_N \sum_{m=0}^N |f|'_{N+m}|g|'_{N-m}$.

Avant de prouver ce résultat, remarquons que ce développement correspond à la loi de composition pour la quantification anti-Wick des polynômes, plus un reste que l'on contrôle en norme d'opérateur par f et g.

Les trois sous-parties suivantes constituent la preuve du théorème 2.1.

2.3.2 Le noyau K

Rappelons les propriétés de P. On a définit à la proposition 2.6 la projection orthogonale de $L(\mathbb{C},\mu_\hbar)$ sur $B_\hbar$, les différents lemmes de la partie 2.3.1 nous permettent de donner l'expression et certaines propriétés de P :

— si $f \in L^2(\mathbb{C},\mu)$, on a $P(f)(u) = \int_{\mathbb{C}} \Pi(u,v) f(v) \mathrm{d}v$, où $\Pi(u,v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(|u|^2+|v|^2\right)+u\overline{v}}$.
— $|\Pi(u,v)| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}|u-v|^2}$
— $\Pi(u,v)\Pi(v,w) = \frac{1}{2\pi} e^{-(v-u)(\overline{v}-\overline{w})} \Pi(u,w)$

On considère $W : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à (z_1,z_2,z_3,z_4) associe $1+|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_4|$. Si $g : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$ est telle que $|g|W^{-N}$ est bornée, on introduit $K(g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$K(g)(z_1,z_4) = \int_{\mathbb{C}^2} \Pi(z_1,z_2)\Pi(z_2,z_3)\Pi(z_3,z_4) g(z_1,z_2,z_3,z_4) \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \tag{176}$$

Nous introduisons aussi la notation suivante : si a,b,c,d sont quatre fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on note $a \boxtimes b \boxtimes c \boxtimes d$ la fonction qui à (z_1,z_2,z_3,z_4) associe le complexe $a(z_1)b(z_2)c(z_3)d(z_4)$.

Nous justifions l'expression de K par le lemme suivant :

Lemme 2.10. *Si f_1, f_2 sont dans $L^\infty(\mathbb{C})$, $K(1 \boxtimes f_1 \boxtimes f_2 \boxtimes 1)$ est le noyau de $T(f_1)T(f_2)$.*

Démonstration. Si $\phi \in L^2(\mathbb{C})$, on doit d'abord projeter sur B, donc $T(f_2)\phi = P\left(f_2 P(\phi)\right)$. On a donc :

$$T(f_1)T(f_2)\phi(z_1) = \int_{\mathbb{C}} \Pi(z_1,z_2) f_1(z_2) \left(\int_{\mathbb{C}} \Pi(z_2,z_3) f_2(z_3) \left(\int_{\mathbb{C}} \Pi(z_3,z_4)\phi(z_4) \mathrm{d}z_4 \right) \mathrm{d}z_3 \right) \mathrm{d}z_2 \tag{177}$$

$$= \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{C}^2} \Pi(z_1,z_2)\Pi(z_2,z_3)\Pi(z_3,z_4) f_1(z_2) f_2(z_3) \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \right) \phi(z_4) \mathrm{d}z_4 \tag{178}$$

$$= \int_{\mathbb{C}} K(1 \boxtimes f_1 \boxtimes f_2 \boxtimes 1)(z_1,z_4)\phi(z_4) \mathrm{d}z_4 \tag{179}$$

□

Nous devons donc nous intéresser aux propriétés de K.

Lemme 2.11. *Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}^4)$ telle que $|g|W^{-N}$ et $|f|W^{-N}$ soient bornées, où f est une dérivée partielle quelconque de g. On a :*

1. $K\left((\overline{z_2}-\overline{z_3})g\right) = K\left(\frac{\partial g}{\partial z_2}\right)$
2. $K\left((z_3-z_2)g\right) = K\left(\frac{\partial g}{\partial \overline{z_2}}\right)$

Démonstration. Nous ne montrons que la première expression de l'énoncé, la preuve de la deuxième étant identique. En utilisant la loi de composition pour les noyaux Π, on remarque que $\left(\frac{\partial}{\partial z_2} + (\overline{z_2}-\overline{z_3})\right)\left(\Pi(z_1,z_2)\Pi(z_2,z_3)\right) = 0$. Comme $g \longmapsto K(g)$ est linéaire, montrons que $K\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_2} - (\overline{z_2}-\overline{z_3})\right) g\right)(z_1,z_4) = 0$. Cette dernière expression vaut :

$$\int_{\mathbb{C}^2} \Pi(z_1,z_2)\Pi(z_2,z_3)\Pi(z_3,z_4) \left(\frac{\partial}{\partial z_2} - (\overline{z_2}-\overline{z_3}) \right) g(z_2,z_3) \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \tag{180}$$

$$= - \int_{\mathbb{C}^2} \left(\frac{\partial}{\partial z_2} + (\overline{z_2}-\overline{z_3}) \right) \left(\Pi(z_1,z_2)\Pi(z_2,z_3)\right) \Pi(z_3,z_4) g(z_2,z_3) \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 = 0 \tag{181}$$

La première égalité est obtenue par intégration par parties (le terme de bord est nul d'après les hypothèses faites sur g et parce que les noyaux Π tendent vers 0 en $+\infty$). La dernière égalité est due à la remarque faite au début de cette démonstration. □

Nous allons maintenant nous intéresser à la norme d'un opérateur de noyau $K(g)$. Tout repose sur le lemme suivant, qui sera aussi utile pour la quantification Weyl.

Lemme 2.12 (Test de Schur)**.** *Soit* $K \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *une fonction à valeurs complexes et soit* T_K *l'opérateur de noyau* K*. Alors* T_K *s'étend à un opérateur de* $L^2(\mathbb{R})$ *et on a :*

$$\|T_K\|_{Op}^2 \leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\mathrm{d}y\right)\left(\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\mathrm{d}x\right) \tag{182}$$

Démonstration. On pose :

$$C_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\mathrm{d}y \tag{183}$$

$$C_2 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\mathrm{d}x \tag{184}$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|T_K(f)(x)| = \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|^{\frac{1}{2}}|K(x,y)|^{\frac{1}{2}}|f(y)|\mathrm{d}y \tag{185}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)||f(y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \tag{186}$$

$$\leq \sqrt{C_1}\left(\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)||f(y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \tag{187}$$

On intègre par rapport à x et on applique le théorème de Fubini :

$$\|T_K(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_1 \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)||f(y)|^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{188}$$

$$= C_1 \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\mathrm{d}x\right)|f(y)|^2\mathrm{d}y \tag{189}$$

$$\leq C_1C_2\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \tag{190}$$

□

Lemme 2.13. $K(g)$ *est le noyau d'un opérateur de* $L^2(\mathbb{C},\mu)$ *qui vérifie :*

$$\|T_{K(g)}\|_{Op} \leq C_N \sup_{x\in\mathbb{C}^4}\left(|g(x)|W^{-N}(x)\right) \tag{191}$$

pour $C_N > 0$ *indépendante de* g*.*

Démonstration. Cette majoration provient d'un test de Schur. Si $z_1 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\int_{\mathbb{C}} |K(g)(z_1,z_4)|\mu(z_4) \leq \int_{\mathbb{C}^3} |\Pi(z_1,z_2)\Pi(z_2,z_3)\Pi(z_3,z_4)g(z_1,z_2,z_3,z_4)|\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}z_4 \tag{192}$$

$$\leq C_N \sup_{x\in\mathbb{C}^4}\left(|g(x)|W^{-N}(x)\right) \tag{193}$$

où on a utilisé l'égalité $|\Pi(u,v)| = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}|u-v|^2}$ et où la constante vaut

$$C_N = \int_{\mathbb{C}^3} e^{-\frac{1}{2}\left(|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_4|^2\right)}W(z_1,z_2,z_3,z_4)^N\mu(z_2)\mu(z_3)\mu(z_4) \tag{194}$$

De même on montre que $\int_{\mathbb{C}} |K(g)(z_1,z_4)|\mathrm{d}z_1 \leq C_N \sup_{x\in\mathbb{C}^4}\left(|g(x)|W^{-N}(x)\right)$. □

2.3.3 Fin de la preuve et un corollaire

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(f,g) \in \mathcal{C}_b^{2N}(\mathbb{C}) \times \mathcal{C}_b^{N}(\mathbb{C})$. On va calculer $K(1 \boxtimes f \boxtimes g \boxtimes 1)$ en remplaçant f par son développement de Taylor autour de z_3 :

$$f(z_2) = \sum_{\alpha+\beta<2N} \frac{1}{\alpha!\beta!} \partial_z^\alpha \partial_{\overline{z}}^\beta f(z_3)(z_2 - z_3)^\alpha (\overline{z_2} - \overline{z_3})^\beta + r_N(z_2, z_3) \tag{195}$$

où $|r_N(z_2,z_3)| \le C'_N |f|'_{2N} (1 + |z_2 - z_3|)^{2N}$, pour une constante C'_N indépendante de f. Pour alléger les formules nous notons $f_{\alpha,\beta} = \partial_z^\alpha \partial_{\overline{z}}^\beta f$. On va interpréter les termes de cette somme comme les noyaux des opérateurs suivants :

— $P_{\alpha,\beta}$ est l'opérateur de noyau $K\left(f_{\alpha,\beta}(z_3)(z_2 - z_3)^\alpha (\overline{z_2} - \overline{z_3})^\beta g(z_3)\right)$.

— Q_N est l'opérateur de noyau $K\left(r_N(z_2,z_3) g(z_3)\right)$.

On a donc :

$$T(f)T(g) = \sum_{\alpha+\beta<2N} \frac{1}{\alpha!\beta!} P_{\alpha,\beta} + Q_N \tag{196}$$

En appliquant le lemme 2.13, on obtient la majoration

$$\|Q_N\|_{Op} \le C \sum_{m=0}^{N} |f|'_{N+m} |g|'_{N-m}. \tag{197}$$

La dernière partie de la preuve consiste à montrer que les opérateurs $P_{\alpha,\beta}$, soit sont dans l'image de T, soit on peut contrôler efficacement leur norme d'opérateur. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.14. *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha + \beta < 2N$. Si $\alpha < N$ et $\beta \le \alpha$, alors*

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha!(-1)^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)!} T\left(\partial_{\overline{z}}^{\alpha-\beta}(f_{\alpha,\beta} g)\right) \tag{198}$$

et sinon

$$\|P_{\alpha,\beta}\|_{op} \le C_N \sum_{m=0}^{N} |f|'_{N+m} |g|'_{N-m} \tag{199}$$

pour $C_N > 0$ indépendante de f et g.

Démonstration. Premier cas : si $\beta > \alpha$. D'après le lemme 2.11, $P_{\alpha,\beta}$ est l'opérateur de noyau $K\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^\beta \left(f_{\alpha,\beta}(z_3)(z_2 - z_3)^\alpha g(z_3)\right)\right)$. On dérive donc β fois $(z_2 - z_3)^\alpha$ par rapport à z_2, et si $\beta > \alpha$, on obtient $P_{\alpha,\beta} = 0$ et l'inégalité (199) est vérifiée.

Deuxième cas : si $\beta \le \alpha$, on peut dériver et $P_{\alpha,\beta}$ est l'opérateur de noyau $\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} K\left(f_{\alpha,\beta}(z_3) g(z_3)(z_2 - z_3)^{\alpha-\beta}\right)$. On distingue alors deux sous-cas :

— si $\alpha \ge N$, alors $\alpha + \beta + (\alpha - \beta) = 2\alpha \ge 2N$ et on peut donc trouver $\gamma \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha + \beta + \gamma = 2N$ et $\gamma \le \alpha - \beta$. Par le lemme (2.11), on réécrit le noyau de $P_{\alpha,\beta}$ sous la forme suivante :

$$\frac{\alpha!(-1)^\gamma}{(\alpha-\beta)!} K\left((z_2 - z_3)^{\alpha-\beta-\gamma} \left(\partial_{\overline{z_3}}^\gamma (f_{\alpha,\beta} g)\right)(z_3)\right) \tag{200}$$

Nous allons montrer que cette expression vérifie l'inégalité (199). On utilise la règle de Leibniz :

$$(z_2 - z_3)^{\alpha-\beta-\gamma} \left(\partial_{\overline{z_3}}^{\gamma}(f_{\alpha,\beta} g)\right)(z_3) = \sum_{l=0}^{\gamma} (z_2 - z_3)^{\alpha-\beta-\gamma} \binom{l}{\gamma} \partial_{\overline{z_3}}^{l} g(z_3) \partial_{\overline{z_3}}^{\gamma-l} f_{\alpha,\beta}(z_3) \tag{201}$$

Chaque terme de la somme multiplié par W^{-2N} est encore borné, grâce aux hypothèses faites sur f et g (et grâce à $|z_2 - z_3|^{\alpha-\beta-\gamma} \times W^{-2N} \leq 1$). Par le lemme 2.13, on obtient :

$$\|P_{\alpha,\beta}\|_{op} \leq C_{2N} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} \sum_{l=0}^{\gamma} \binom{l}{\gamma} |f|'_{\alpha+\beta+\gamma-l} |g|'_l \tag{202}$$

$$\leq C'_{2N} \sum_{l=0}^{N} |f|'_{2N-l} |g|'_l \tag{203}$$

$$= C'_{2N} \sum_{m=0}^{N} |f|'_{N+m} |g|'_{N-m} \tag{204}$$

— si $\alpha \leq N$ et $\beta \leq \alpha$, alors $f_{\alpha,\beta} g$ est de classe $\mathcal{C}^{\alpha-\beta}$ et on peut dériver totalement, c'est-à-dire réécrire le noyau de $P_{\alpha,\beta}$ sous la forme

$$\frac{\alpha!(-1)^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)!} K\left(\left(\partial_{\overline{z_3}}^{\alpha-\beta}(f_{\alpha,\beta} g)\right)(z_3)\right). \tag{205}$$

Grâce au lemme 2.10, on reconnaît là le noyau de $T\left(\frac{\alpha!(-1)^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)!}\left(\partial_{\overline{z_3}}^{\alpha-\beta}(f_{\alpha,\beta} g)\right)(z_3)\right)$. Cela conclut la preuve.

□

Pour finir la preuve du théorème, il nous faut le lemme technique suivant, qui s'appuie principalement sur le constat que $\partial_{\overline{z}}^{\gamma} f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\beta+\gamma}$.

Lemme 2.15. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{(-1)^{\alpha-\beta}}{\beta!(\alpha-\beta)!} \partial_{\overline{z}}^{\alpha-\beta} (f_{\alpha,\beta} g) = \frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha!} f_{\alpha,0} g_{0,\alpha}. \tag{206}$$

Démonstration. On note S la somme de gauche, on effectue le changement de variable $\gamma = \alpha - \beta$ et on utilise la règle de Leibniz :

$$S = \sum_{\gamma}^{\alpha} \frac{(-1)^{\gamma}}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} \partial_{\overline{z}}^{\gamma} (f_{\alpha,\alpha-\gamma} g) \tag{207}$$

$$= \sum_{\gamma}^{\alpha} \sum_{\delta}^{\gamma} \frac{(-1)^{\gamma}}{(\alpha-\gamma)!\delta!(\gamma-\delta)!} f_{\alpha,\alpha-\delta} g_{0,\delta} \tag{208}$$

$$= \sum_{\delta}^{\alpha} \left(\sum_{\gamma=\delta}^{\alpha} \frac{(-1)^{\gamma}}{(\alpha-\gamma)!(\gamma-\delta)!} \right) \frac{1}{\delta!} f_{\alpha,\alpha-\delta} g_{0,\delta} \tag{209}$$

On note $C(\delta,\alpha)$ la somme entre parenthèses ; dans cette somme on effectue le changement de variable $j=\gamma-\delta$:

$$C(\delta,\alpha)=\sum_{j=0}^{\alpha-\delta}\frac{(-1)^{j+\delta}}{(\alpha-\delta-j)!j!} \tag{210}$$

$$=\frac{(-1)^{\delta}}{(\alpha-\delta)!}\sum_{j=0}^{\alpha-\delta}\frac{(\alpha-\delta)!}{(\alpha-\delta-j)!j!}(-1)^{j} \tag{211}$$

$$=\frac{(-1)^{\delta}}{(\alpha-\delta)!}(1-1)^{\alpha-\delta}=\delta_{\delta,\alpha}(-1)^{\alpha} \tag{212}$$

où on a utilisé le symbole de Krönecker. On remplace alors dans S :

$$S=\sum_{\delta}^{\alpha}C(\delta,\alpha)\frac{1}{\delta!}f_{\alpha,\alpha-\delta}g_{0,\delta}=\frac{(-1)\alpha}{\alpha!}f_{\alpha,0}g_{0,\alpha} \tag{213}$$

□

On peut maintenant terminer la preuve du théorème 2.1 :

Démonstration du théorème 2.1 . On repart de l'expression (196) :

$$T(f)T(g)=\sum_{\alpha+\beta<2N}\frac{1}{\alpha!\beta!}P_{\alpha,\beta}+Q_N \tag{214}$$

On réécrit la somme afin de pouvoir appliquer le lemme 2.14 :

$$\sum_{\alpha+\beta<2N}\frac{1}{\alpha!\beta!}P_{\alpha,\beta}=\sum_{\alpha=0}^{2N-1}\sum_{\beta=0}^{\min(2N-1-\alpha,\alpha)}\frac{1}{\alpha!\beta!}P_{\alpha,\beta} \tag{215}$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{N-1}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\frac{1}{\alpha!\beta!}P_{\alpha,\beta}+\sum_{\alpha=N}^{2N-1}\sum_{\beta=0}^{2N-1-\alpha}\frac{1}{\alpha!\beta!}P_{\alpha,\beta} \tag{216}$$

La première égalité est due au fait que si $\beta>\alpha$, $P_{\alpha,\beta}=0$. On peut appliquer le lemme 2.14, on a alors :

$$T(f)T(g)=\sum_{\alpha=0}^{N-1}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\alpha!(-1)^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)!}T\left(\partial_{\bar{z}}^{\alpha-\beta}(f_{\alpha,\beta}g)\right)+Q'_N \tag{217}$$

où $\|Q'_N\|_{Op}\leq C_N\sum_{m=0}^{N}|f|'_{N+m}|g|'_{N-m}$. En utilisant le lemme 2.15, on réécrit cette expression sous la forme :

$$T(f)T(g)=\sum_{\alpha=0}^{N-1}\frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha!}f_{\alpha,0}g_{0,\alpha}+Q'_N \tag{218}$$

Cela conclut la démonstration du théorème 2.1. □

Nous devons maintenant revenir dans l'espace de Bargmann, le lemme 2.8 implique que pour tout $(f,g)\in\mathcal{C}_b^{2N}(\mathbb{C})\times\mathcal{C}_b^{N}(\mathbb{C})$, on a le développement suivant :

$$T_\hbar(f)T_\hbar(g)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^k\hbar^k}{k!}T_\hbar\left(\left(\partial_z^k f\right)\left(\partial_{\bar{z}}^k g\right)\right)+R_{\hbar,N}(f,g) \tag{219}$$

où

$$\|R_{\hbar,N}(f,g)\|_{Op} \leq C_N \hbar^N \sum_{m=0}^{N} |f|'_{N+m}|g|'_{N-m} \tag{220}$$

Le corollaire suivant justifie à lui seul tout le travail de cette section :

Corollaire 2.3. *Si $f, g \in \mathcal{C}_b^4(\mathbb{C})$, alors*

$$\left\| \frac{i}{\hbar}[T_\hbar(f), T_\hbar(g)] - T_\hbar\left(\{f,g\}\right) \right\|_{Op} \leq C\hbar |f,g|_4 \tag{221}$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de f et g.

Démonstration. On applique le théorème 2.1 :

$$\begin{aligned}
[T_\hbar(f), T_\hbar(g)] &= T_\hbar(f)T_\hbar(g) - T_\hbar(g)T_\hbar(f) &(222)\\
&= T_\hbar(fg) - \hbar T_\hbar\left((\partial_z f)(\partial_{\overline{z}} g)\right) - T_\hbar(gf) + \hbar T_\hbar\left((\partial_z g)(\partial_{\overline{z}} f)\right) + R_{\hbar,2}(f,g) - R_{\hbar,2}(g,f) &(223)\\
&= \hbar T_\hbar\left((\partial_z g)(\partial_{\overline{z}} f) - (\partial_z f)(\partial_{\overline{z}} g)\right) + R_{\hbar,2}(f,g) - R_{\hbar,2}(g,f) &(224)
\end{aligned}$$

En se rappelant que $\partial_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_q - i\partial_p)$ et $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_q + i\partial_p)$, on montre que $(\partial_z g)(\partial_{\overline{z}} f) - (\partial_z f)(\partial_{\overline{z}} g) = -i\{f,g\}$. On a donc, encore grâce au théorème 2.1 :

$$\begin{aligned}
\|[T_\hbar(f), T_\hbar(g)] + i\hbar T_\hbar\left(\{f,g\}\right)\|_{Op} &\leq \|R_{\hbar,2}(f,g)\|_{Op} + \|R_{\hbar,2}(g,f)\|_{Op} &(225)\\
&\leq C_2\hbar^2 \left(\sum_{m=0}^{2} \left(|f|'_{2+m}|g|'_{2-m} + |g|'_{2+m}|f|'_{2-m} \right) \right) &(226)\\
&\leq C\hbar^2 |f,g|_4 &(227)
\end{aligned}$$

On se ramène à l'expression de l'énoncé en divisant par $\hbar$. □

3 La quantification Weyl

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on définit sa transformée de Fourier symplectique par :

$$\tilde{f}(a) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar}\sigma(a,x)} f(x) \frac{\mathrm{d}x}{2\pi\hbar} \tag{228}$$

où $a = (a_1, a_2)$, $x = (q, p)$ et $\sigma(a, x) = a_1 p - a_2 q$. On a la formule d'inversion suivante :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i}{\hbar}\sigma(a,x)} \tilde{f}(a) \frac{\mathrm{d}a}{2\pi\hbar} \tag{229}$$

L'idée de Weyl est la suivante : si on quantifie $e^{-\frac{i}{\hbar}\sigma(a,(q,p))}$ en $e^{-\frac{i}{\hbar}\sigma(a,(Q,P))}$, on pourra définir "à la main" $Op^W(f)$ grâce à la formule d'inversion (229) :

$$Op^W(f) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i}{\hbar}\sigma(a,(Q,P))} \tilde{f}(a) \frac{\mathrm{d}a}{2\pi\hbar} \tag{230}$$

La définition de $U(a)$, donnée ci-dessous, traduit cette intuition.

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1. *Soient $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y \in \mathbb{R}$. On introduit l'opérateur $U(a)$ par :*

$$U(a)\psi(y) = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar} a_1 a_2\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} a_2 y\right) \psi(y - a_1) \tag{231}$$

Corollaire 3.1. *$U(a)$ est unitaire pour tout a dans $\mathbb{R}^2$.*

On remarque que :
— $U((a_1, 0))\psi(y) = \psi(y - a_1)$, ce qui correspond bien à une translation en position ;
— $U((0, a_2))\psi(y) = e^{\frac{i}{\hbar} a_2 y}\psi(y)$, qui est la transformée de Fourier d'une translation en impulsion.

On rappelle une conséquence du théorème de représentation de Riesz :

Lemme 3.1. *Soient H un espace de Hilbert et B une forme bilinéaire continue sur H, il existe une unique application $L \in \mathcal{L}(H)$, telle que :*

$$\forall u, v \in H, B(u, v) = \langle L(u), v\rangle_H \tag{232}$$

On peut maintenant définir proprement la quantification Weyl :

Définition 3.2. *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, il existe un unique opérateur continu sur $L^2(\mathbb{R})$, noté $Op^W(f)$, vérifiant :*

$$\forall \phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}), \langle \phi, Op^W(f)\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(a)\langle \phi, U(a)\psi\rangle \frac{\mathrm{d}a}{2\pi\hbar} \tag{233}$$

Démonstration. Si pour ϕ et ψ dans $L^2(\mathbb{R})$, on pose $B(\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(a)\langle \phi, U(a)\psi\rangle \frac{\mathrm{d}a}{2\pi\hbar}$, on obtient une forme bilinéaire continue et on lui applique le lemme précédent. La seule chose à montrer est la continuité de B. Par Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|B(\psi, \phi)| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{f}(a)| \times \|\phi\| \times \|U(a)\psi\| \frac{\mathrm{d}a}{2\pi\hbar} \tag{234}$$

Mais $U(a)$ est unitaire ce qui nous donne $|B(\psi, \phi)| \leq K \times \|\phi\| \times \|\psi\|$ où $K = \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{f}(a)| \frac{\mathrm{d}a}{2\pi\hbar}$. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $K < \infty$ et B est bien continue. □

Le théorème suivant donne l'expression de $Op^W(f)\psi$ en tant que fonction de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1. *Pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :*

$$Op^W(f)\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{y+s}{2}, p\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(y-s)p\right) \psi(s) \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}p}{2\pi\hbar} \tag{235}$$

Démonstration. Soient ϕ et ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, par définition de $Op^W(f)$ on a :

$$\langle \phi, Op^W(f)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(a) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(y)} U(a)\psi(y)\mathrm{d}y \right) \frac{\mathrm{d}a}{2\pi\hbar} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(y)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(a)U(a)\psi(y) \frac{\mathrm{d}a}{2\pi\hbar} \right) \mathrm{d}y \tag{236}$$

En se rappelant de l'expression de $U(a)\psi$, on en déduit que pour tout y réel on a :

$$Op^W(f)\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(a_1, a_2)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(a_2 y - \frac{a_1 a_2}{2}\right)\right) \psi(y-a_1) \frac{\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2}{2\pi\hbar} \tag{237}$$

On va remplacer $\tilde{f}$ en utilisant la formule d'inversion de Fourier citée plus haut :

$$Op^W(f)\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^4} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(a_2\left(y - q - \frac{a_1}{2}\right) + a_1 p\right)\right) f(q,p)\psi(y-a_1) \frac{\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{(2\pi\hbar)^2} \tag{238}$$

Pour p réel on pose $g_p : q \longmapsto f(q,p)$, on a alors :

$$Op^W(f)\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i}{\hbar}a_1 p\right) \psi(y-a_1) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i}{\hbar}a_2\left(y - q - \frac{a_1}{2}\right)\right) g_p(q)\mathrm{d}q\mathrm{d}a_2 \right) \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}a_1}{2\pi\hbar} \tag{239}$$

On va isoler l'intégrale dans la parenthèse et reconnaître à peu de choses près la transformée de Fourier directe et indirecte de g_p ; le terme entre parenthèses vaut donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}a_2\left(y - \frac{a_1}{2}\right)\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}a_2 q\right) g_p(q)\mathrm{d}q \right) \mathrm{d}a_2 & \qquad (240)\\
= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}a_2\left(y - \frac{a_1}{2}\right)\right) \widetilde{g_p}(-a_2)\sqrt{2\pi\hbar}\mathrm{d}a_2 & \qquad (241)\\
= -g_p\left(y - \frac{a_1}{2}\right) 2\pi\hbar & \qquad (242)\\
= -f\left(y - \frac{a_1}{2}, p\right) 2\pi\hbar & \qquad (243)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$Op^W(f)\psi(y) = -\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i}{\hbar}a_1 p\right) \psi(y-a_1) f\left(y - \frac{a_1}{2}, p\right) \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}a_1}{2\pi\hbar} \tag{244}$$

Le changement de variable $s = y - a_1$ conclut la preuve. $\square$

Pour la suite, nous définissons la transformée de Fourier semi-classique. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et si $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{F}_\hbar(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{\hbar}\langle x,\xi\rangle} f(x)\mathrm{d}x \tag{245}$$

On définit aussi la transformée de Fourier classique :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\mathrm{d}x \tag{246}$$

Les applications $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_\hbar$ sont des isomorphismes de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et elles vérifient :

$$\mathcal{F}_\hbar^{-1} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} R\mathcal{F}_\hbar \tag{247}$$

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^d} R\mathcal{F} \tag{248}$$

où R est définie par $Rf(x) = f(-x)$.

Fort de ce théorème, on peut montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, alors $Op^W(f)(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, cela nous permet de voir $Op^W(f)$ comme un endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a les corollaires suivants :

Corollaire 3.2. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, le noyau de Schwartz de $Op^W(f)$ est :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ K_f(x,y) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{\frac{i}{\hbar}(x-y)\xi} \mathrm{d}\xi \tag{249}$$

On a la formule d'inversion suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar} y\xi} K_f\left(x + \frac{\xi}{2}, x - \frac{\xi}{2}\right) \mathrm{d}\xi \tag{250}$$

Démonstration. La première formule est une conséquence du théorème précédent. Pour la deuxième, on réécrit l'équation (249) de la manière suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ K_f(2x-y, y) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} f(x,\xi) e^{\frac{2i}{\hbar}(x-y)\xi} \mathrm{d}\xi \tag{251}$$

On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on pose $f_x(\xi) = f(x,\xi)$. On obtient donc $K_f(2x-y,y) = \frac{1}{2\pi\hbar}\mathcal{F}_\hbar(f_x)(2y-2x)$ pour tout y réel. On modifie encore cette relation pour obtenir $\frac{1}{2\pi\hbar}\mathcal{F}_\hbar(f_x)(\xi) = K_f\left(x + \frac{\xi}{2}, x - \frac{\xi}{2}\right)$ pour tout ξ réel. On peut alors utiliser la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar} y\xi} K_f\left(x + \frac{\xi}{2}, x - \frac{\xi}{2}\right) \mathrm{d}\xi \tag{252}$$

□

Corollaire 3.3. *La quantification Weyl vérifie la condition C.*

Démonstration. En terme de noyau de Schwartz, la condition C se réécrit $K_f(x,y) = \overline{K_{\overline{f}}(y,x)}$, ce qu'on vérifie aisément en partant de l'expression de K_f. □

Corollaire 3.4. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ vérifie $Op^W(f) = 0$, alors $f = 0$.*

Démonstration. Cela implique que $K_f = 0$, et donc que $f = 0$ par la deuxième formule du corollaire précédent. □

3.2 Action sur les polynômes

A l'inverse de la quantification Toeplitz, nous avons directement définit la quantification Weyl de manière analytique. Le but de cette partie est de démontrer le théorème 3.2, qui donne l'action sur les polynômes de la quantification Weyl.

Définition 3.3. *Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'opérateurs. On définit l'opérateur $\sigma[A_1, \ldots, A_n]$ par*

$$\sigma[A_1, \ldots, A_n] = A_{\sigma(1)} \ldots A_{\sigma(n)} \tag{253}$$

Théorème 3.2. *Soit $n, m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$Op^W(q^n p^m) = \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m}} \sigma[Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_m] \tag{254}$$

où $Q_i = Q$ pour $1 \leq i \leq n$ et $P_j = P$ pour $1 \leq j \leq m$.

Pour simplifier les notations, on note $\sigma[Q^n, P^m]$ l'opérateur $\sigma[Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_m]$ dans le cas où $Q_i = Q$ pour $1 \leq i \leq n$ et $P_j = P$ pour $1 \leq j \leq m$.

Démonstration. Tout repose sur le fait suivant : si $a, b \in \mathbb{R}$ et si $k \in \mathbb{N}$, alors

$$Op^W\left((aq + bp)^k\right) = (aQ + bP)^k \tag{255}$$

Nous n'avons pas trouvé de démonstration élémentaire de ce fait. Il est prouvé page 85 de [4], corollaire 2.29. En effet, si on admet ce résultat, en développant les deux membres de l'égalité (255) et en utilisant la linéarité de Op^W, on obtient :

$$\sum_{\alpha+\beta=k} \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} a^\alpha b^\beta Op^W(q^\alpha p^\beta) = \sum_{\alpha+\beta=k} a^\alpha b^\beta \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\alpha+\beta}} \sigma[Q^\alpha, P^\beta] \tag{256}$$

On identifie alors $\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} Op^W(q^\alpha p^\beta)$ au coefficient de $a^\alpha b^\beta$ dans le membre de droite :

$$Op^W(q^\alpha p^\beta) = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\alpha+\beta}} \sigma[Q^\alpha, P^\beta] \tag{257}$$

□

En prenant $n = 0$ et $m = 1$ (et l'inverse), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.5. *La quantification Weyl vérifie la condition B.*

3.3 Composition des symboles

On introduit les semi-normes définissant l'espace de Schwartz :

$$N_p(f) = \sup_{|\alpha| \leq p,\, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^\infty} \tag{258}$$

Comme pour la composition Toeplitz, pour montrer le théorème d'Egorov nous allons avoir besoin d'un développement asymptotique de $Op^W(f)Op^W(g)$. Le but est de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.3. *Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et si $N \in \mathbb{N}$, on a :*

$$Op^W(f)Op^W(g) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k Op^W\left((\partial_q\partial_y - \partial_p\partial_x)^k (f(q,p)g(x,y))\big|_{(x,y)=(q,p)}\right) + Q_N(f,g) \tag{259}$$

où $\|Q_N\|_{Op} \leq C_N \hbar^{N-1} N_{2N+12}(f) N_{2N+12}(g)$.

Nous allons définir une loi $\diamond$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, vérifiant :

$$Op^W(f \diamond g) = Op^W(f)Op^W(g) \tag{260}$$

Pour que cette définition ait un sens il faut montrer que $Op^W(\mathcal{S}(\mathbb{R}^2))$ est stable par composition. Nous allons exprimer le noyau de $Op^W(f)Op^W(g)$ puis appliquer la formule d'inversion (250) pour définir $f \diamond g$ (on pourra vérifier alors que $f \diamond g$ est dans la classe de Schwartz). On aura une représentation intégrale de $f \diamond g$, on utilisera alors la méthode de la phase stationnaire pour obtenir notre développement.

3.3.1 Majoration des normes d'opérateurs

Avant de se lancer dans la preuve du théorème 3.3, donnons l'outil qui permettra d'obtenir la majoration du reste.

Proposition 3.1. *Si $f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^2)$, alors $Op^W(f) : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est continu et*

$$\|Op^W(f)\|_{Op} \leq \frac{C}{\hbar} N_2(f) \tag{261}$$

Démonstration. On sait que $Op^W(f)$ est un opérateur à noyau et que son noyau K_f est donné par le corollaire (3.2), on pose :

$$C_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K_f(x, y)| \mathrm{d}y \tag{262}$$

$$C_2 = \sup_{y \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K_f(x, y)| \mathrm{d}x \tag{263}$$

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, alors les constantes C_1 et C_2 sont finies. D'après le lemme 2.12, on a :

$$\|Op^W(f)\|_{Op} \leq \sqrt{C_1 C_2} \tag{264}$$

Or on vérifie aisément que $C_i \leq \frac{C}{\hbar}\|f\|_{L^1}$, pour $i = 1, 2$, où C est une constante qui ne dépend ni de $\hbar$ ni de f. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on a aussi la majoration $\|f\|_{L^1} \leq C N_2(f)$, pour une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de f, cela donne le résultat. $\square$

Cette méthode ne donne la bonne majoration dans Egorov qu'en dimension 1, en dimension n, on aurait $\|Op^W(f)\|_{Op} \leq \frac{C}{\hbar^n} N_2(f)$, la majoration est d'autant moins bonne que la dimension de l'espace des phases est grande. On peut citer sans démonstration le résultat suivant, qui permettrait de contourner cette difficulté en dimension quelconque :

Proposition 3.2. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ dont toutes les dérivées sont bornées. L'opérateur $Op^W(f) : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est continu et vérifie*

$$\|Op^W(f)\|_{Op} \leq \sum_{|\alpha| \leq Mn} \hbar^{\frac{|\alpha|}{2}} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty} \tag{265}$$

pour M une constante universelle.

3.3.2 Représentation intégrale

Le but de cette partie est de donner la représentation intégrale de $f \diamond g$:

Théorème 3.4. *Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^2$:*

$$f \diamond g(x) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{2i}{\hbar}\sigma(a,b)\right) f(x+a)g(x+b)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{(\pi\hbar)^2} \tag{266}$$

Démonstration. Le but est de chercher le noyau de Schwartz de $Op^W(f)Op^W(g)$, on le note pour l'instant K. On a :

$$K(x,y) = \int_{\mathbb{R}} K_f(x,z)K_g(z,y)\mathrm{d}z \tag{267}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^3} f\left(\frac{x+z}{2},\xi\right) g\left(\frac{z+y}{2},\zeta\right) e^{\frac{i}{\hbar}(x-z)\xi + \frac{i}{\hbar}(z-y)\zeta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}z \tag{268}$$

D'après la relation (250) :

$$f\diamond g(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}x_2\xi} K\left(x_1+\frac{\xi}{2}, x_1-\frac{\xi}{2}\right)\mathrm{d}\xi \tag{269}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^4} f\left(\frac{x_1+\frac{\xi}{2}+z}{2},\eta\right) g\left(\frac{z+x_1-\frac{\xi}{2}}{2},\gamma\right) e^{\frac{i}{\hbar}\left(x_2\xi + \left(x_1+\frac{\xi}{2}-z\right)\eta + \left(z-x_1+\frac{\xi}{2}\right)\gamma\right)}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}z}{(2\pi\hbar)^2} \tag{270}$$

On effectue les changements de variables suivants :

$$a = (a_1,a_2) = \left(\frac{z-x_1+\frac{\xi}{2}}{2}, \eta - x_2\right) \tag{271}$$

$$b = (b_1,b_2) = \left(\frac{z-x_1-\frac{\xi}{2}}{2}, \gamma - x_2\right) \tag{272}$$

On pose $x = (x_1,x_2)$, on a alors :

$$f\diamond g(x) = \frac{1}{(\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^4} f(x+a)g(x+b)e^{\frac{2i}{\hbar}\sigma(a,b)}\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_2 \tag{273}$$

□

3.3.3 Fin de la preuve et un corollaire

Pour la fin de la preuve, on pose :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{274}$$

de sorte que $\sigma(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle$ pour $x = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4$. On a $\det(M) = 1$, signature$(M) = 0$ et $Q^{-1} = Q$.

On admet le résultat suivant :

Proposition 3.3. *Pour toute matrice réelle M, symmétrique, inversible de dimension n :*

$$\mathcal{F}\left(e^{\frac{i}{2}\langle Mx,x\rangle}\right)(\xi) = \frac{(2\pi)^{n/2}e^{\frac{i\pi}{4}\text{signature}(M)}}{|\text{det}M|^{1/2}}e^{-\frac{i}{2}\langle M^{-1}\xi,\xi\rangle} \tag{275}$$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 3.3 en utilisant la méthode de la phase stationnaire.

Démonstration du théorème 3.3. Soit $z \in \mathbb{R}^2$, on définit une fonction $u_z \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ par $u_z(a,b) = f(z+a)g(z+b)$. On rappelle que :

$$f \diamond g(z) = \frac{1}{(\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} e^{\frac{2i}{\hbar}\sigma(a,b)}u_z(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b \tag{276}$$

On réécrit cette égalité avec la matrice Q :

$$f \diamond g(z) = \frac{1}{(\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^4} e^{\frac{i}{\hbar}\langle Qx,x\rangle}u_z(x)\mathrm{d}x \tag{277}$$

En utilisant l'identité $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\overline{\psi} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}$, on modifie l'expression de $f \diamond g(z)$:

$$f \diamond g(z) = \frac{1}{16\hbar^2\pi^6}\int_{\mathbb{R}^4}\widehat{u_z}(\xi)\,\overline{\mathcal{F}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\langle Qx,x\rangle}\right)(\xi)}\,\mathrm{d}x \tag{278}$$

En utilisant la proposition 3.3, on montre l'identité :

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\langle Qx,x\rangle}\right)(\xi) = (\pi\hbar)^2 e^{\frac{i\hbar}{4}\langle Q\xi,\xi\rangle} \tag{279}$$

On a donc :

$$f \diamond g(z) = \frac{1}{16\pi^4}\int_{\mathbb{R}^4}\widehat{u_z}(\xi)e^{-\frac{i\hbar}{4}\langle Q\xi,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \tag{280}$$

L'intérêt du passage de l'expression (277) à l'expression (280) est le passage du $\hbar$ du dénominateur au numérateur dans l'exponentielle complexe, ce qui nous permet d'obtenir un développement de Taylor simple de l'intégrale, en tant que fonction de $\hbar$. A cet effet on introduit $J(\hbar, u_z) = 16\pi^4 f \diamond g(y)$. Comme $u_z \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, J est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\hbar$ et on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $N \in \mathbb{N}$:

$$J(\hbar, u_z) = \sum_{k=0}^{N}\frac{\hbar^k}{k!}\partial_\hbar^k J(0) + \frac{\hbar^{N+1}}{N!}\int_0^1(1-t)^N\partial_\hbar^{N+1}J(\hbar t)\mathrm{d}t \tag{281}$$

On va calculer les dérivées partielles de J par rapport à $\hbar$:

$$\partial_\hbar J(\hbar) = -\frac{i}{4}\int_{\mathbb{R}^4}\widehat{u_z}(\xi)\langle Q\xi,\xi\rangle e^{-\frac{i\hbar}{4}\langle Q\xi,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \tag{282}$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier on montre que :

$$\widehat{u_z}(\xi)\langle Q\xi,\xi\rangle = 2\mathcal{F}((\partial_2\partial_3 - \partial_1\partial_4)u_z)(\xi) \tag{283}$$

On peut donc montrer par récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$\partial_\hbar^k J(\hbar) = \left(\frac{i}{2}\right)^k\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{F}\left((\partial_1\partial_4 - \partial_2\partial_3)^k u_z\right)(\xi)e^{-\frac{i\hbar}{4}\langle Q\xi,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \tag{284}$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^k J\left(\hbar, (\partial_1\partial_4 - \partial_2\partial_3)^k u_z\right) \tag{285}$$

Pour alléger les notations, on introduit l'opérateur différentiel $P_x = \partial_1\partial_4 - \partial_2\partial_3$, on a alors $\partial_\hbar^k J(\hbar) = \left(\frac{i}{2}\right)^k J(\hbar, P_x^k u_z)$. On peut maintenant revenir à l'expression de $f \diamond g(z)$:

$$f \diamond g(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k \frac{J(0, P_x^k u_z)}{16\pi^4} + \frac{1}{16\pi^4 N!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{N+1} \int_0^1 (1-t)^N J(\hbar t, P_x^{N+1} u_z)\mathrm{d}t \quad (286)$$

Or par la formule d'inversion de Fourier, on a $\frac{J(0,P_x^k u_z)}{16\pi^4} = P_x^k u_z(0)$. En revenant à la définition de u en fonction de f et g, on montre que $P_x^k u_z(0) = (\partial_q\partial_y - \partial_p\partial_x)^k (f(q,p)g(x,y))_{|(x,y)=(q,p)}$, où on a posé $z = (q,p)$. On obtient donc le bon développement.

Pour finir la preuve, intéressons-nous au reste intégral. Le but est d'utiliser la proposition 3.1, il faut donc calculer la norme N_2 du reste en tant que fonction de z, on pose donc :

$$R_{N+1}(z) = \frac{1}{16\pi^4 N!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{N+1} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^4} (1-t)^N e^{-\frac{i\hbar t}{4}\langle Q\xi,\xi\rangle} \mathcal{F}(P_x^{N+1} u_z)(\xi)\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi \quad (287)$$

On rappelle les deux estimées classiques dont nous allons avoir besoin : si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \sup_{|\alpha|\leq n+1} \|\partial^\alpha u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (288)$$

$$\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\, N_{n+1}(u) \quad (289)$$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$ tels que $|\alpha| \leq 2$ et $|\beta| \leq 2$. Comme $u_z \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on dérive sous l'intégrale par rapport au paramètre z :

$$|z^\alpha \partial_z^\beta R_{N+1}(z)| \leq C_{N+1}\hbar^{N+1} \int_{\mathbb{R}^4} |z^\alpha \partial_z^\beta \mathcal{F}(P_x^{N+1} u_z)(\xi)|\mathrm{d}\xi \quad (290)$$

Or, toujours par dérivation sous l'intégrale, on a $\partial_z^\beta \mathcal{F}(P_x^{N+1}u_z)(\xi) = \mathcal{F}\left(\partial_z^\beta P_x^{N+1} u_z\right)(\xi)$, on a donc :

$$|z^\alpha \partial_z^\beta R_{N+1}(z)| \leq C_{N+1}\hbar^{N+1} \|\mathcal{F}\left(z^\alpha \partial_z^\beta P_x^{N+1} u_z\right)\|_{L^1(\mathbb{R}^4)} \quad (291)$$

On applique la majoration (288) puis la majoration (289) :

$$|z^\alpha \partial_z^\beta R_{N+1}(z)| \leq C_{N+1}\hbar^{N+1} N_{10}\left(z^\alpha \partial_z^\beta P_x^{N+1} u_z\right) \quad (292)$$

En se rappelant de l'expression de u_z en fonction de f et g, on peut alors écrire :

$$N_2(R_{N+1}) \leq C_{N+1}\hbar^{N+1} N_{2(N+1)+12}(f) N_{2(N+1)+12}(f) \quad (293)$$

On applique maintenant la proposition 3.1 :

$$\|Op^W(R_{N+1})\|_{Op} \leq C_{N+1}\hbar^N N_{2(N+1)+12}(f) N_{2(N+1)+12}(g) \quad (294)$$

Ceci conclut la preuve du théorème 3.3. □

Comme pour la composition Toeplitz, on énonce le corollaire essentiel suivant :

Corollaire 3.6. *Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on a*

$$\left\| \frac{i}{\hbar}[Op^W(f), Op^W(g)] - Op^W(\{f,g\}) \right\|_{Op} \leq C\hbar N_{18}(f) N_{18}(g) \quad (295)$$

Démonstration. En utilisant le théorème 3.3 :

$$\begin{aligned} Op^W(f)Op^W(g) = & Op^W(fg) - \frac{i\hbar}{2}Op^W(\{f,g\}) \\ & - \frac{\hbar^2}{8}Op^W\left(\partial_q^2 f \partial_p^2 g - 2\partial_{q,p}^2 f \partial_{q,p}^2 g + \partial_p^2 f \partial_q^2 g\right) + Q_3(f,g) \end{aligned}$$

Le premier et le troisième terme sont symétriques en f et g, on a donc :

$$[Op^W(f), Op^W(g)] = -i\hbar Op^W(\{f,g\}) + Q_3(f,g) + Q_3(g,f) \tag{296}$$

On utilise la majoration du reste fournie par le théorème 3.3 :

$$\begin{aligned} \|[Op^W(f), Op^W(g)] + i\hbar Op^W(\{f,g\})\|_{Op} &\leq \|Q_3(f,g)\|_{Op} + \|Q_3(g,f)\|_{Op} && (297) \\ &\leq C\hbar^2 N_{18}(f)N_{18}(g) && (298) \end{aligned}$$

On se ramène à l'expression de l'énoncé en divisant par $\hbar$. □

4 Les théorèmes d'Egorov

4.1 Egorov pour la quantification Toeplitz

Nous allons maintenant démontrer le théorème d'Egorov pour la quantification Toeplitz.

Théorème 4.1 (Egorov)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{C}_c^4(\mathbb{C}) \times \mathcal{C}_b^4(\mathbb{C})$. On note ϕ_t le flot hamiltonien associé à f, et U_t l'opérateur d'évolution associé au hamiltonien quantique $H = T_\hbar(f)$. Soit $\tau \in \mathbb{R}_+$, alors il existe $C > 0$ tel que :*

$$\forall t \in [-\tau, \tau],\ \|T_\hbar(g \circ \phi_t) - U_t T_\hbar(g) U_t^*\|_{Op} \leq C\hbar. \tag{299}$$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{C}_c^4(\mathbb{C})$, le flot ϕ_t est définit pour tout $t \in \mathbb{R}$ et l'énoncé a bien un sens. L'opérateur U_t étant unitaire, il est équivalent de montrer que :

$$\forall t \in [-\tau, \tau],\ \|U_t^* T_\hbar(g \circ \phi_t) U_t - T_\hbar(g)\|_{Op} \leq C\hbar. \tag{300}$$

L'intérêt de cette réécriture est que si on pose $B_t = U_t^* T_\hbar(g \circ \phi_t) U_t$, l'inégalité (300) se réécrit $\|B_t - B_0\|_{Op} \leq C\hbar$. On pense donc à dériver B_t pour ensuite intégrer et obtenir la majoration.

On pose $A_t = T_\hbar(g \circ \phi_t)$. On rappelle que, si A est un opérateur de $L^2(\mathbb{C})$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_t^* A U_t) = U_t^* \left(\frac{i}{\hbar}[H, A] \right) U_t \tag{301}$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_t^* A_t U_t) = U_t^* \left(\frac{i}{\hbar}[H, A_t] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_t \right) U_t \tag{302}$$

En se rappelant des identités (8) et (12), on montre :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g \circ \phi_t) = \{g, f\} \circ \phi_t = \{g \circ \phi_t, f \circ \phi_t\} = \{g \circ \phi_t, f\} \tag{303}$$

$T_\hbar$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ commutent donc :

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} = T_\hbar\left(\{g \circ \phi_t, f\}\right) \tag{304}$$

On vérifie aisément que les hypothèses faites sur f et g entrainent que $g \circ \phi_t$ a toutes ses dérivées bornées, de plus la fonction f étant à support compact, ses dérivées sont bien bornées. On peut donc appliquer le corollaire 2.3 :

$$\frac{i}{\hbar}[H, A_t] = T_\hbar\left(\{f, g \circ \phi_t\}\right) + R_{\hbar,t} \tag{305}$$

où

$$\|R_{\hbar,t}\|_{Op} \leq C\hbar |g \circ \phi_t, f|_4 \tag{306}$$

Le lemme suivant va nous permettre de majorer le membre de droite indépendamment de t dans $[-\tau, \tau]$.

Lemme 4.1. *Si $(f, g) \in \mathcal{C}_c^4 \times \mathcal{C}_b^4$, et $\tau > 0$, on définit ϕ_t comme le flot associé à f, alors il existe $C > 0$ tel que :*

$$\forall t \in [-\tau, \tau],\ |g \circ \phi_t, f|_4 \leq C \tag{307}$$

Démonstration du lemme (4.1). Par définition, $|f, g\circ\phi_t|_4 = \sum_{j=0}^{4} |f|'_j |g\circ\phi_t|'_{4-j}$, et il suffit donc de majorer les $|g\circ\phi_t|'_j$. On considère la fonction $\mathcal{C}^4$ suivante,

$$\tilde{g} : (t,x) \in [-\tau,\tau]\times\mathbb{C} \longmapsto g\circ\phi_t(x) \tag{308}$$

Par hypothèse sur f, il existe $R>0$ tel que $\mathrm{supp}(f)\subset B(0,R)$. Sur $[-\tau,\tau]\times\mathrm{supp}(f)$, la fonction $\tilde{g}$ est bornée (ainsi que toutes ses dérivées) car elle est continue sur un compact. Et si $x\notin B(0,R)$, on a :

$$\tilde{g}(t,x) = g(\phi_t(x)) = g(x) \tag{309}$$

car en dehors de $\mathrm{supp}(f)$, $\phi_t = \mathrm{Id}$. Hors de $\mathrm{supp}(f)$ on prend donc comme majorant des dérivées de $\tilde{g}$ les majorants des dérivées de g, qui existent par hypothèse sur g. □

On a alors pour tout $t\in[-\tau,\tau]$, $\|R_{\hbar,t}\|_{Op} \leq C\hbar$. On reprend l'expression de $U_t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_t^*A_tU_t)\right)U_t^*$:

$$\begin{aligned}
U_t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_t^*A_tU_t)\right)U_t^* &= \frac{i}{\hbar}[H,A_t] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_t && (310)\\
&= T_\hbar\left(\{f, g\circ\phi_t\}\right) + R_{\hbar,t} + T_\hbar\left(\{g\circ\phi_t, f\}\right) && (311)\\
&= R_{\hbar,t} && (312)
\end{aligned}$$

On intègre $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_t^*A_tU_t)$, entre 0 et $t\in[0,\tau]$:

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(U_s^*A_sU_s)\,\mathrm{d}s = U_t^*T_\hbar(g\circ\phi_t)U_t - T_\hbar(g) \tag{313}$$

En utilisant l'expression (312), il vient par l'inégalité triangulaire que pour tout $t\in[-\tau,\tau]$, on a :

$$\|U_t^*T_\hbar(g\circ\phi_t)U_t - T_\hbar(g))\|_{Op} \leq \int_0^t \|U_s^*R_{\hbar,s}U_s\|_{Op}\,\mathrm{d}s \leq \tau C\hbar \tag{314}$$

Cela conclut la preuve du théorème d'Egorov pour la quantification Toeplitz. □

4.2 Egorov pour la quantification Weyl

On montre maintenant le théorème d'Egorov pour la quantification Weyl.

Théorème 4.2 (Egorov)**.** *Soient $f,g\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. On note ϕ_t le flot hamiltonien associé à f, et U_t l'opérateur d'évolution associé au hamiltonien quantique $H = Op^W(f)$. Soit $\tau\in\mathbb{R}_+$, alors il existe $C>0$ tel que :*

$$\forall t\in[-\tau,\tau],\ \|Op^W(g\circ\phi_t) - U_tOp^W(g)U_t^*\|_{Op} \leq C\hbar. \tag{315}$$

Démonstration. Si f est à support compact, le flot ϕ_t est définit pour tout $t\in\mathbb{R}$ et l'énoncé a bien un sens. L'opérateur U_t étant unitaire, il est équivalent de montrer que :

$$\forall t\in[-\tau,\tau],\ \|U_t^*Op^W(g\circ\phi_t)U_t - Op^W(g)\|_{Op} \leq C\hbar. \tag{316}$$

On pose $A_t = Op^W(g\circ\phi_t)$. On rappelle deux égalités démontrées dans la preuve d'Egorov pour Toeplitz :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_t^*A_tU_t) = U_t^*\left(\frac{i}{\hbar}[H,A_t] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_t\right)U_t \tag{317}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\circ\phi_t) = \{g\circ\phi_t, f\} \tag{318}$$

Op^W et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ commutent donc :

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} = Op^W\left(\{g \circ \phi_t, f\}\right) \tag{319}$$

On vérifie aisément que les hypothèses faites sur f et g entrainent que $g \circ \phi_t$ est dans la classe de Schwartz. On peut donc appliquer le corollaire 3.6 :

$$\frac{i}{\hbar}[H, A_t] = Op^W\left(\{f, g \circ \phi_t\}\right) + R_{\hbar,t} \tag{320}$$

où

$$\|R_{\hbar,t}\|_{Op} \leq C\hbar N_{16}(f) N_{16}(g \circ \phi_t) \tag{321}$$

Le lemme suivant va nous permettre de majorer le membre de droite indépendamment de t dans $[-\tau, \tau]$.

Lemme 4.2. *Soit $(f, g) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on note ϕ_t le flot associé à f. Si $\tau > 0$, alors*

$$\exists C > 0,\, \forall t \in [-\tau, \tau],\, N_{16}(g \circ \phi_t) \leq C \tag{322}$$

Démonstration du lemme 4.2. La preuve est similaire à celle du lemme 4.1. □

La fin de la preuve du théorème 4.2 est identique à celle du théorème 4.1, en remplaçant $T_\hbar$ par Op^W.

□

Références

[1] F. A. Berezin and M. A. Shubin. *The Schrödinger equation*, volume 66 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Translated from the 1983 Russian edition by Yu. Rajabov, D. A. Leĭtes and N. A. Sakharova and revised by Shubin, With contributions by G. L. Litvinov and Leĭtes.

[2] L. Charles and L. Polterovich. Sharp correspondence principle and quantum measurements. *ArXiv e-prints*, October 2015.

[3] Stephan De Bièvre. Quantum chaos : a brief first visit. In *Second Summer School in Analysis and Mathematical Physics (Cuernavaca, 2000)*, volume 289 of *Contemp. Math.*, pages 161–218. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[4] Gerald B. Folland. *Harmonic analysis in phase space*, volume 122 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[5] Brian C. Hall. Holomorphic methods in analysis and mathematical physics. In *First Summer School in Analysis and Mathematical Physics (Cuernavaca Morelos, 1998)*, volume 260 of *Contemp. Math.*, pages 1–59. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[6] Maciej Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.