Silvain Rideau
Bureau T7

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 1

27 et 30 octobre 2012

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Bons ordres et chaînes descendantes) **:**
Soit $(X, <)$ un ensemble ordonné. Montrer les propriétés suivantes :

1. $(X, <)$ est bien-fondé si et seulement s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de X.
2. $(X, <)$ est un bon ordre si et seulement si toute partie non vide de X contient un plus petit élément.

Exercice 2 (Calculs de cardinalités) **:**

1. Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables ou indénombrables.
   a) L'ensemble $\mathbb{N}^2$,
   b) l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers,
   c) l'ensemble des suites de rationnels qui convergent vers 0 (on pourra utiliser des suites de la forme $(\epsilon_n 2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\epsilon_n = 0$ ou 1 pour tout n),
   d) l'ensemble des suites de rationnels qui sont constantes à partir d'un certain rang.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.

Exercice 3 (Bons ordres et anti-bons ordres) **:**
On suppose que $(X, <)$ est un bon ordre et que $(X, >)$ est également un bon ordre. Montrer que X est fini.

Exercice 4 (Plongements de bons ordres) **:**
Un plongement d'un ensemble ordonné $(X, <)$ dans un autre $(Y, <)$ est une application (injective) $f : X \to Y$ telle que $f(x) < f(x')$ ssi $x < x'$ pour tout $x, x' \in X$.

1. Montrer que tout bon ordre dénombrable ou fini se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$.
2. Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R}, <)$?

Exercice 5 (Axiomes du choix) **:**
On considère les trois énoncés suivants :
(AC) : tout produit d'ensembles non vides est non vide
(ACD) : si $\mathcal{R}$ est une partie de $X \times X$ telle que, pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ tel que $(x, y) \in \mathcal{R}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X vérifiant $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dont on peut choisir le premier élément.
(ACden) : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide
(AC) est appelé *axiome du choix*, (ACD) est appelé *axiome des choix dépendants* et (ACden) est appelé *axiome du choix dénombrable*.

1. Montrer que (ACD) implique (ACden).
2. Une fonction de choix pour un ensemble X est une fonction $f : \mathfrak{P}(X) \smallsetminus \{\varnothing\} \to X$ telle que pour tout $x \in \mathfrak{P}(X) \smallsetminus \{\varnothing\}$, $f(x) \in x$. Montrer que (AC) est équivalent à l'assertion que tout ensemble admet une fonction de choix.
3. Montrer que (AC) est équivalent au fait que toute surjection admet une section, i.e. pour toute surjection $g : X \to Y$ il existe $h : Y \to X$ telle que $g \circ h$ est l'identité sur h.
4. Montrer que (AC) implique (ACD).

5. Montrer que toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

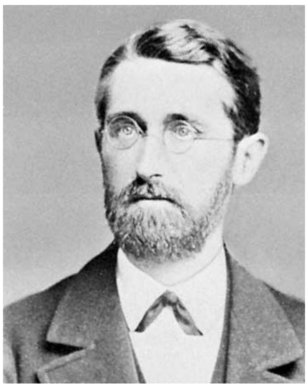
Exercice 6 (Finitude de Dedekind) **:**
Sauf dans les dernières questions, tous ces résultats se démontrent sans axiome du choix.

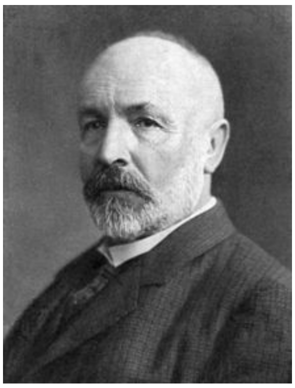
1. Soit X un ensemble, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) X contient un sous-ensemble dénombrable.
   b) Pour tout ensemble Y au plus dénombrable, $X \cup Y$ est équipotent à X.
   c) X est en bijection avec une partie propre de X (on parle dit alors que X est infini au sens de Dedkind, ou D-infini).
2. Montrer que tout ensemble fini est D-fini (i.e. n'est pas D-infini).
3. Montrer que l'union et le produit de deux ensembles D-finis sont D-finis.
4. Montrer que la réunion disjointe d'une famille D-finie d'ensemble D-finis est D-finie.
5. Montrer pour tout ensemble infini X, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ est D-infini.
6. Montrer, en utilisant (ACden) que pour tout ensemble X, $\mathbb{N}$ est subpotent à X si et seulement si tout ensemble fini est subpotent à X.
7. En déduire que si on admet (ACden), un ensemble est infini si et seulement si il est D-infini.

Exercice 7 (Lemme de König) **:**
Un *graphe* $\mathcal{G}$ est la donnée d'un ensemble S (les *sommets*) et d'un ensemble A (les *arêtes*) de paires d'éléments de S (ne contenant pas de singleton). Un graphe est dit *fini* si S est fini et *infini* sinon.
Un *chemin* dans un graphe $\mathcal{G}$ est une suite $(s_i)_{i \in I}$ de sommets (avec soit $I = \{0, \ldots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on parle de chemin *fini* de longueur n, soit $I = \mathbb{N}$ et on parle de chemin *infini*) telle que $\{s_i, s_{i+1}\} \in A$ (pour tout i tel que $i + 1 \in I$). Un chemin est *simple* s'il ne contient pas deux fois le même sommet (*i.e.* $s_i = s_j \Rightarrow i = j$).
Un graphe est *connexe* si, quels que soient les sommets s et t de $\mathcal{G}$, il existe un chemin contenant s et t.
Le *degré* d'un sommet s est le nombre de sommets t adjacents à s dans $\mathcal{G}$ (*i.e.* tels que $\{s, t\} \in A$). Un graphe est de *degré fini* si tous ses sommets sont de degré fini.

Montrer, à l'aide de l'axiome des choix dépendants, que tout graphe connexe infini de degré fini a un chemin simple infini. (On pourra commencer par traiter le cas d'un *arbre*, c'est-à-dire un graphe qui ne contient pas de cycle.)

Exercice 8 (Qui sont ces messieurs moustachus ?[1]) **:**





1. Je remercie N. Curien pour cette excellente idée.