Silvain Rideau
Bureau T7

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

# Corrigé du TD de Logique 1

27 et 30 septembre 2013

**Exercice 3** (Bons ordres et anti-bons ordres) **:**
Supposons que $(X,<)$ soit un bon ordre infini. On construit par récurrence une suite infinie strictement croissante de $X$ en choisissant $x_0 = \min X$ et $x_{i+1} = \min X \setminus \{x_j \mid j \leq i\}$. On montre ainsi que $(X,>)$ n'est pas un bon ordre.

**Exercice 5** (Axiomes du choix) **:**

4. Soit $f$ une fonction de choix sur $X$. On définit la suite suivante par récurrence, $x_{n+1} = f(\{y \mid (x,y) \in \mathcal{R}\})$. Cette suite a évidemment les propriétés requises.
5. On peut injecter $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_i$ dans $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X_i$ en envoyant chaque $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_i$ sur $(x, \min\{n \mid x \in X_n\}))$. Par axiome du choix dénombrable, on trouve $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un bijection entre $X_i$ et $\mathbb{N}$. On peut alors construire une bijection entre $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X_i$ et $\mathbb{N}^2$ (qui est dénombrable) en envoyant $(x,i)$ sur $(f_i(x), i)$.

**Exercice 6** (Finitude de Dedekind) **:**

1. (a) ⇒ (b) Soit $X'$ une partie dénombrable de $X$. $X \cup Y = X \cup (X' \cup Y)$. Comme $X' \cup Y$ est dénombrable, on a $f : X' \simeq X' \cup Y$. Soit $g : X \cup Y \to X$ qui a $x \in X' \cup Y$ associe $f(x)$ et à $x \in X \setminus X'$ associe $x$. Il est évident que c'est un isomorphisme.
   (b) ⇒ (c) Soit $Y$ un singleton disjoint de $X$ et $f : X \cup Y \simeq X$, alors la restriction de $f$ à $X$ est injective mais non surjective.
   (c) ⇒ (a) Soit $f : X \to X$ injective non surjective. Soit $x_0 \notin f(X)$ et $x_n = f^n(x_0)$. Si $f^m(x_0) = f^n(x_0)$ pour $n \leq m$, par injectivité de $f$, on a donc $f^{m-n}(x_0) = x_0$ ce qui n'est possible que si $m = n$. Ainsi $x_n$ définit bien une injection de $\mathbb{N}$ dans $X$.
2. Montrons par récurrence sur $n$ qu'il n'existe pas de bijection de $\{0,\ldots,n-1\}$ dans une partie propre de celui-ci. Soit $f$ une telle bijection. Comme $f$ n'est pas surjective, on peut supposer que $n-1$ n'est pas dans l'image, quitte à composer par une permutation. On considère alors la restriction de $f$ à l'ensemble $\{0,\ldots,n-2\}$. Si elle n'est pas surjective, cela contredit l'hypothèse de récurrence. Si elle est surjective, on a nécessairement $f(n-1) = n-1$, ce qui est absurde.
3. Soient $X$ et $Y$ deux ensembles D-finis. Soit $A \subseteq X \cup Y$ (et $a_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $A$), alors, comme $A$ est la réunion de ces deux ensembles, $A \cap X$ ou $A \cap Y$ est infini. Supposons que ce soit $A \cap X$. On peut alors injecter $\mathbb{N}$ dans $A \cap X$, en posant $i_{n+1} = \min\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in (A \cap X) \setminus \{a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}\}\}$. La fonction $n \mapsto a_{i_n}$ est alors une injection de $\mathbb{N}$ dans $X$, ce qui contredit la D-finitude de $X$.
   De même, s'il existe $A \subseteq X \times Y$ dénombrable, alors $\pi_1(A)$ ou $\pi_2(A)$ est infini (car le produit de deux ensembles finis est fini). Supposons que ce soit $\pi_1(A)$. On peut alors injecter $\mathbb{N}$ dans $\pi_1(A)$ en posant $i_{n+1} = \min\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in A \setminus \bigcup_{i=0}^{n} \pi_1^{-1}(x_i)\}$ et $x_{n+1} = \pi_1(a_{i_{n+1}})$, ce qui est absurde.
4. Soit $I$ un ensemble D-fini, et pour $i \in I$, soit $X_i$ un ensemble D-fini. Soit $A \subset \bigsqcup_{i\in I} X_i$ un ensemble dénombrable. On énumère $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$. Pour tout $k < \omega$, soit $i_k \in I$ tel que $a_k \in X_{i_k}$. Comme $I$ est D-fini, l'ensemble $I_0 = \{i_k : k < \omega\}$ est fini (s'il était infini, comme c'est l'image d'un ensemble dénombrable on pourrait comme précédemment en déduire une injection de $\mathbb{N}$ dans $I$). On a donc $A \subset \bigcup_{i\in I_0} X_i$. Comme $A$ est infini, il existe $i \in I_0$ tel que $A \cap X_i$ est infini (c'est le principe des tiroirs, qu'on peut montrer facilement par récurrence sur $|I_0|$). Mais alors $A \cap X_i$ est dénombrable (par le même raisonnement que dans le cas de l'union de deux éléments), ce qui contredit le fait que $X_i$ est D-fini.
5. On définit une application $f$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ par $f : k \mapsto \{A \in \mathfrak{P}(X) : |A| = k\}$. Pour $k > 0$, $f(k) \neq \varnothing$ car $X$ est infini. Il est clair alors que $f$ est injective, donc $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ est D-infini.

6. Soit $X$ tel que tout ensemble fini lui soit subpotent. Il s'en suit qu'aucun ensemble fini ne peut se surjecter sur $X$. En effet, supposons qu'un ensemble de cardinal $n$ se surjecte sur $X$. Comme cet ensemble est fini, cette surjection à une section (sans axiome du choix) et donc $X$ est fini de cardinal plus petit que $n$. Mais on sait aussi que $n+1$ est subpotent à $X$ ce qui impliquerais que $n+1$ est subpotent à $n$ ce qu'on a déjà montré être absurde.

   On peut donc construire par récurrence (en faisant des choix) une suite à valeur dans $X$. Supposons que les $n$ premiers soient construits, comme $n$ ne peut se surjecter sur $X$, on peut choisir un point qui n'est pas déjà pris pour $x_n$. Cette suite nous donne bien une injection de $\mathbb{N}$ dans $X$.

   Comme tout ensemble fini est subpotent à $\mathbb{N}$, la réciproque est évidente.

7. Comme un ensemble infini est exactement un ensemble auquel tout ensemble fini est subpotent, on a bien montré qu'un ensemble infini est D-infini. La réciproque a été montrée à la question 2.

**Exercice 7** (Lemme de König) **:**
Supposons pour commencer que $\mathcal{G}$ est un arbre. On dit que deux sommets $x$ et $y$ sont ***reliés*** s'il existe un chemin (fini) partant de $x$ et terminant à $y$. Deux sommets $x$ et $y$ sont voisins si $\{x,y\} \in A$. Soit $C$ l'ensemble des couples $(x,y) \in A^2$ tels que $\{x,y\} \in A$ et tel qu'il existe une infinité de sommets $z$ qui soient reliés à $y$ par un chemin simple ne contenant pas $x$.
Soit $(x,y) \in C$. Soient $z_1,\dots,z_n$ les voisins de $y$, avec $z_1 = x$ et soit $\mathcal{Z}$ l'ensembles des sommets auxquels $y$ est relié par un chemin ne contenant pas $x$. Pour $k \in \{2,\dots,n\}$, soit $\mathcal{Z}_k$ l'ensembles des sommets reliés à $z_k$ par un chemin simple ne passant pas par $y$. Comme le graphe $\mathcal{G}$ ne contient pas de cycles, on a $\mathcal{Z} = \{y\} \cup \bigcup_{k=2,\dots,n} \mathcal{Z}_k$ (un chemin simple partant de $y$ et ne passant pas par $x$, doit passer par un et un seul des sommets $z_2,\dots,z_n$). Il existe donc $k$ tel que $\mathcal{Z}_k$ soit infini. En particulier, il existe $z_k$, tel que $(y,z_k) \in C$.
Il nous faut montrer que $C$ est non-vide. On peut montrer plus généralement que pour tout $x$, il existe $y$ tel que $(x,y) \in C$. Le raisonnement est exactement le même que celui du paragraphe précédent : $x$ est relié à une infinité de sommets. Un chemin simple reliant $x$ à un sommet $z$ doit passer d'abord par un des voisins de $x$. Il existe donc un voisin $y$ de $x$ tel que $(x,y) \in C$.
On définit à présent une partie $\mathcal{R}$ de $C^2$ par $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathcal{R}$ si $x_2 = y_1$. Par le paragraphe précédent, pour tout $(x_1,y_1) \in C$, il existe $(x_2,y_2) \in C$ tel que $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathcal{R}$. Par l'axiome des choix dépendants, il existe une suite $((x_n,y_n))_{n<\omega}$ d'éléments de $C$ telle que $((x_n,y_n),(x_{n+1},y_{n+1})) \in \mathcal{R}$ pour tout $n$. On en déduit que $(x_n)_{n<\omega}$ est un chemin dans $\mathcal{G}$. Il est simple puisque par construction, on a $x_n \neq x_{n+2}$ pour tout $n$ et si on avait $x_n = x_m$ pour $m > n+2$, on pourrait construire un cycle dans $\mathcal{G}$.

Pour le cas général (sans l'hypothèse que $\mathcal{G}$ est un arbre), il y a plusieurs manières de procéder. Une solution serait d'adapter la preuve précédente en ajoutant des conditions pour construire un chemin qui s'éloigne de plus en plus de son point de départ. On présente une autre solution.
On se ramène au cas précédent en extrayant de $\mathcal{G}$ un arbre couvrant maximal (un arbre connexe ayant même ensemble de sommets et dont l'ensemble d'arêtes est un sous-ensemble des arêtes de $\mathcal{G}$). Pour se faire, commencer par remarquer que l'ensemble $A$ des arêtes de $\mathcal{G}$ est dénombrable (ceci utilise l'axiome du choix). On choisit une énumération $A = \{a_0, a_1, \dots\}$. On construit par récurrence une suite $A_n$ de parties de $A$.
- On définit $A_0 = A$.
- Si $A_n$ est défini, on considère l'arête $a_n$. Supposons qu'il existe un cycle dans $\mathcal{G}$ contenant $a_n$, dont toutes les arêtes appartiennent à $A_n \cap \{a_0,\dots,a_{n-1}\}$. On pose alors $A_{n+1} = A_n \setminus \{a_n\}$ (on efface l'arête $a_n$). Sinon, on pose $A_{n+1} = A_n$.

On pose finalement $A_\omega = \bigcap_{n<\omega} A_n$. On considère le graphe $\mathcal{G}'$ dont l'ensemble des sommets est $S$ et l'ensemble des arêtes $A_\omega$. C'est donc un sous-graphe de $\mathcal{G}$. Il est facile de voir qu'il ne contient pas cycle puisque la construction efface au moins une arête par cycle de $\mathcal{G}$. Pour montrer qu'il est connexe, il suffit de montrer que si $x, y \in S$ sont voisins dans $\mathcal{G}$, alors il existe dans $\mathcal{G}'$ un chemin qui les relie. Pour voir cela, soit $a_n = \{x,y\}$. Si $a_n \in A_\omega$, c'est bon. Si $a_n \notin A_\omega$, alors c'est que cette arête a été effacée lors de la construction de $A_{n+1}$, et cela implique qu'il existe un chemin reliant $x$ à $y$ et composée d'arêtes dans $A_n \cap \{a_0,\dots,a_{n-1}\}$. Ces arêtes sont toujours présentes dans $A_\omega$.
Le graphe $\mathcal{G}'$ est donc un arbre connexe. Par la question précédente, il existe un chemin infini dans $\mathcal{G}'$, qui est donc aussi un chemin infini de $\mathcal{G}$.

**Exercice 8** (Qui sont ces messieurs moustachus ?) **:**
Ce sont, de gauche à droite :

- Dedekind, celui des coupures et de l'exercice 6 ;
- Cantor, celui qui le premier a formalisé la notion d'ensemble et prouvé (entre autre) que $X$ et $2^X$ ne sont jamais équipotents ;
- König (Dénes celui-ci, on en verra un autre), celui de l'exercice 7.