Silvain Rideau
Bureau T7
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 2 (Ordinaux)

4 et 7 octobre 2013

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Contre-exemples) **:**

1. Donner des ordinaux α, α', β tels que $(\alpha + \alpha')\beta \neq \alpha\beta + \alpha'\beta$.
2. Trouver une suite strictement croissante $(\alpha_n)_{n<\omega}$ d'ordinaux convergeant vers un ordinal α, et un ordinal β tels que $\alpha\beta$ ne soit pas la limite de $(\alpha_n\beta)_{n<\omega}$.
3. Trouver β et $\alpha, \alpha' < \beta$ tels que $\alpha\beta = \beta \neq \alpha'\beta$.
4. Trouver α, β et γ tels que $(\alpha\beta)^\gamma \neq \alpha^\gamma\beta^\gamma$.
5. Trouver λ limite et α tels que $\lambda^\alpha \neq \sup_{\beta<\lambda} \beta^\alpha$.

Exercice 2 (Calcul ordinal) **:**

1. Calculer $\omega.\omega^2, \omega.\omega^\omega, \omega^\omega.\omega, \omega(\omega^\omega + 1), (\omega^\omega + 1)\omega$.
2. Soit α un ordinal infini, montrer qu'il existe β limite et $n \in \omega$ tel que $\alpha = \beta + n$.
3. Montrer qu'il n'existe pas d'ordinal α tel que $\omega^2 = \alpha + \omega$.

Exercice 3 (Ordinaux et topologie) **:**
Soit α un ordinal muni de la topologie de l'ordre (i.e. la topologie dont une base d'ouverts est donnée par les intervales ouverts (a, b) avec $a < b \in \alpha \cup \{+\infty, -\infty\}$). Montrer que :

1. α est séparé.
2. $\beta \in \alpha$ est isolé si et seulement si β est successeur ou zéro.
3. α est discret si et seulement si $\alpha \subseteq \omega$.
4. α est compact si et seulement si α est successeur ou zéro.

Exercice 4 (Points fixes) **:**
Soit F une fonction croissante des ordinaux dans les ordinaux, on dit que F est *continue* si, pour tout ordinal limite λ, $F(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)$.

1. Trouver un ordinal α tel que $\alpha = \omega + \alpha$, un ordinal β tel que $\beta = \omega\beta$ et un ordinal γ tel que $\gamma = \omega^\gamma$.
2. Soit F croissante continue telle que $F(\alpha) \geq \alpha$ pour tout ordinal α. Montrer que pour tout ordinal α, il existe un plus petit point fixe de F qui soit supérieur à α.
3. Si G est une autre telle application, montrer qu'il existe un point fixe commun à F et G.
4. Montrer que $\alpha = \omega + \alpha$ si et seulement si $\alpha \geq \omega^2$.
5. Montrer que $\alpha = \omega\alpha$ si et seulement s'il existe β tel que $\alpha = \omega^\omega\beta$.

Exercice 5 (Forme normale de Cantor) **:**
On appelle forme normale de Cantor, toute écriture de la forme :

$$\omega^{\alpha_1}k_1 + \cdots + \omega^{\alpha_n}k_n$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$ et $\alpha_1 > \cdots > \alpha_n$.

1. Montrer que, si α est non nul, il existe β tel que $\omega^\beta \leq \alpha < \omega^{\beta+1}$.

2. Montrer que tout ordinal admet une unique forme normale de Cantor.
3. Décrire l'ordre et l'addition pour des ordinaux en forme normale de Cantor.

Exercice 6 (Somme naturelle sur les ordinaux) **:**
Soient α et β des ordinaux. On choisit une suite finie d'ordinaux $\gamma_1 > \cdots > \gamma_n$ telle que

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} k_1 + \cdots + \omega^{\gamma_n} k_n \quad \text{et} \quad \beta = \omega^{\gamma_1} l_1 + \cdots + \omega^{\gamma_n} l_n$$

avec $k_i, l_i \in \omega$ pour $1 \leq i \leq n$. La *somme naturelle* de α et β est définie ainsi :

$$\alpha \oplus \beta = \omega^{\gamma_1}(k_1 + l_1) + \cdots + \omega^{\gamma_n}(k_n + l_n)$$

1. Montrer que $\oplus$ est commutative.
2. Montrer que $\beta < \beta'$ entraîne $\alpha \oplus \beta < \alpha \oplus \beta'$ pour tout α.
3. Montrer que $\alpha + \beta \leq \alpha \oplus \beta$ pour tout α et β.
4. Montrer que toute opération binaire $\oplus^*$ sur les ordinaux qui est strictement croissante dans les deux arguments est minorée par $\oplus$.

Exercice 7 (Suites de Goodstein) **:**
Soient n, p deux entiers. On définit l'écriture de n en base p-itérée de la manière suivante : on écrit d'abord n en base p (par exemple pour $n = 35$, $p = 2$, $35 = 2^5 + 2 + 1$.) Ensuite, on écrit les exposants eux-mêmes en base p et ainsi de suite de sorte que tous les nombres écrits sont inférieurs à p. Ainsi on écrira $35 = 2^{2^2+1} + 2 + 1$.
Pour $q \geq p \geq 2$, on définit la fonction $f_{p,q}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de la manière suivante : Soit n un entier. On écrit n en base p itérée et on remplace dans cette écriture tous les p par des q. Le nombre ainsi formé est $f_{p,q}(n)$. On définit de la même manière les fonctions $f_{p,\omega}$ en remplaçant p par ω (dans le cas où $p > 2$, on écrira les coefficients à droite des p^n).

1. Que vaut $f_{2,3}(35)$? et $f_{3,\omega}(35)$?
2. Montrer que pour tous $\omega \geq r > q > p \geq 2$, on a $f_{q,r} \circ f_{p,q} = f_{p,r}$.
3. Montrer que les fonctions $f_{p,\omega}$ sont strictement croissantes.
   Pour tout entier a, on appelle *suite de Goodstein* de a la suite $(g_n(a))_{n \geq 2}$ définie par :

$$g_2(a) = a \quad \text{et} \quad g_{n+1}(a) = \begin{cases} f_{n,n+1}(g_n(a)) - 1 & \text{si } g_n(a) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Calculer les 5 premiers termes de la suite de Goodstein pour 5.
5. Soit a un entier. Étudier la monotonie de la suite des $f_{p,\omega}(g_p(a))$.
6. Montrer que pour tout entier a la suite de Goodstein pour a est nulle à partir d'un certain rang.

Exercice 8 (Qui sont ces charmants messieurs ?) **:**