Silvain Rideau
Bureau T7
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

# Corrigé du TD de Logique 2 (Ordinaux)

4 et 7 octobre 2013

**Exercice 4** (Points fixes) :

1. - On peut prendre $\alpha = \omega^2$, car $\omega + \omega^2 = \omega(1+\omega) = \omega^2$ ;
   - On peut prendre $\beta = \omega^\omega$, en effet $\omega\omega^\omega = \omega^{1+\omega} = \omega^\omega$ ;
   - Soit la suite définie par la récurrence suivante : $\omega_0 = 1$, $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$. On pose $\gamma = \sup_{n\in\omega} \omega_n$. On a alors $\omega^\gamma = \omega^{\sup_n \omega_n} = \sup_n \omega^{\omega_n} = \sup_n \omega_{n+1} = \gamma$.
2. On définit par récurrence $\alpha_0 = \alpha$ et $\alpha_{n+1} = F(\alpha_n)$ et on pose $\alpha_\omega = \sup_n \alpha_n$. Par hypothèse sur $F$ la suite $\alpha_n$ est croissante. Supposons que cette suite est strictement croissante et donc $\alpha_\omega$ est une ordinal limite.
   On a alors $F(\alpha_\omega) = \sup_{\gamma<alpha_\omega} F(\gamma)$. Comme $\alpha_\omega = \sup_n \alpha_n$, pour tout $\gamma < alpha_\omega$, il existe $n$ tel que $\gamma < alpha_n$ et donc $\sup_{\gamma<alpha_\omega} F(\gamma) \leq \sup_n F(\alpha_n) = \sup_n \alpha_{n+1} = \alpha_\omega$. On a donc trouvé un point fixe et il est alors facile de trouver le plus petit comme précédemment. On peut même vérifier que $\alpha_\omega$ est ce plus petit point fixe.
   En effet, si $\alpha \leq \gamma < \alpha_\omega$ est un point fixe de $F$, il existe $n$ tel que $\alpha_n \leq \gamma < \alpha_{n+1}$ et alors $\alpha_{n+1} = F(\alpha_{n+1}) \leq F(\gamma) = \gamma$ ce qui est absurde.
   Si la suite des $\alpha_n$ n'est pas strictement croissante, il existe $n$ tel que $\alpha_n = F(\alpha_n)$. Comme précédemment, si on prend $n$ minimal, on trouve le plus petit point fixe de $F$ au dessus de $\alpha$.
3. 
4. 
5. 

**Exercice 5** (Forme normale de Cantor) :

1. Soit $\beta = \sup\{\gamma \mid \omega^\gamma \leq \alpha\}$. On a alors $\omega^\beta \leq \alpha$. En effet, si $\beta$ est nul, $\omega^\beta = 1 \leq \alpha$, si $\beta$ est limite alors $\omega^\beta = \sup_{\omega^\gamma \leq \alpha} \omega^\gamma \leq \alpha$ et si $\beta$ est successeur alors $\beta \in \{\gamma \mid \omega^\gamma \leq \alpha\}$ et donc $\omega^\beta \leq \alpha$. De plus si $\omega^{\beta+1} \leq \alpha$, $\beta + 1 \leq \beta$ ce qui est absurbe.
2. On procède par induction sur $\alpha$. Pour l'existence, soit $\alpha_1$ tel que $\omega^{\alpha_1} \leq \alpha < \omega^{\alpha_1+1}$. Soit $\alpha = \omega^{\alpha_1}\delta + \beta$ la division euclidienne de $\alpha$ par $\omega^{\alpha_1}$. Si $\delta \geq \omega$, $\alpha = \omega^{\alpha_1}\delta + \beta \geq \omega^{\alpha_1}\omega = \omega^{\alpha_1+1}$ ce qui est absurde. Il s'en suit donc que $\delta = k_1 \in \omega$. Si $k_1 = 0$, alors $\alpha = \beta < \omega^{\alpha_1}$ ce qui est aussi absurde. On conclut par hypothèse d'induction appliquée à $\beta$.
   Pour ce qui est de l'unicité, supposons $\alpha = \sum_{i=1}^n \omega^{\alpha_i} k_i = \sum_{j=1}^m \omega^{\beta_j} l_j$. Tout d'abord si $n = 0 \neq m$, on a $\alpha = \sum_{i=1}^n \omega^{\alpha_i} k_i = 0 \neq \sum_{j=1}^m \omega^{\beta_j} l_j = \alpha$, il s'en suit que $n = 0$ si et seulement si $m = 0$. Supposons qu'ils soient tous deux non-nuls. Si $\alpha_1 > \beta_1$, comme $\omega^{\beta_j}(l_j + 1) < \omega^{\beta_{j-1}}$, on a, par une récurence descendante immédiate sur $p$, $\sum_{j=p}^m \omega^{\beta_j} l_j < \omega^{\beta_p}(l_j + 1)$ et donc $\alpha < \omega^{\beta_1}(l_j + 1) < \omega^{\alpha_1} \leq \alpha$, ce qui est absurde. Donc $\alpha_1 = \beta_1$ par symétrie. Supposons maintenant $k_1 > l_1$, on a alors $\omega^{\alpha_1}(k_1 - l_1)\sum_{i=2}^n \omega^{\alpha_i} k_i = \sum_{j=2}^m \omega^{\beta_j} l_j$ où $\beta_2 < \alpha_1$. Par induction cela est impossible. On a donc $k_1 = l_1$ et on conclut par induction.
3. On a $\sum_i \omega^{\alpha_i} k_i < \sum_i \omega^{\beta_i} k_i$ si et seulement si il existe $i_0$ tel que pour tout $i < i_0$, $\alpha_i = \beta_i$ et $k_i = l_i$ mais $\alpha_{i_0} > \beta_{i_0}$ ou $\alpha_{i_0} = \beta_{i_0}$ et $k_{i_0} > l_{i_0}$. La preuve est essentiellement la même que la preuve de l'unicité la forme normale de Cantor.
   Pour ce qui est de l'addition, soit $i_0$ maximal tel que $\alpha_{i_0} \geq \beta_1$. Si $\alpha_{i_0} = \beta_1$, on a alors
   $$\sum_i \omega^{\alpha_i} k_i + \sum_i \omega^{\beta_i} k_i = \sum_{i=1}^{i_0-1} \omega^{\alpha_i} k_i + \omega^{\alpha_{i_0}}(k_{i_0} + l_1) + \sum_{i=2} \omega^{\beta_i} k_i.$$
   Si $\alpha_{i_0} > \beta_1$,
   $$\sum_i \omega^{\alpha_i} k_i + \sum_i \omega^{\beta_i} k_i = \sum_{i=1}^{i_0} \omega^{\alpha_i} k_i + \sum_{i=1} \omega^{\beta_i} k_i.$$

**Exercice 6** (Somme naturelle sur les ordinaux) **:**

1. C'est évident.
2. C'est évident en utilisant la description de l'ordre en forme normale de Cantor donnée à la dernière question de l'exercice précédent.
3. C'est aussi immédiat au vue de la dernière question de l'exercice précédent.
4. L'hypothèse faite sur $\oplus^*$ entraîne, par récurrence sur $\gamma$, que pour tous ordinaux $\alpha, \beta, \gamma$, on a $\alpha \oplus^* (\beta + \gamma) \geq (\alpha \oplus^* \beta) + \gamma$. De même, on a aussi $(\alpha + \gamma) \oplus^* \beta \geq (\alpha \oplus^* \beta) + \gamma$.
   On montre par récurrence sur la paire $(\alpha, \beta)$ que $\alpha \oplus^* \beta \geq \alpha \oplus \beta$. (Où on ordonne les paires lexicographiquement, avec la convention de votre choix.) C'est clair pour $(0, 0)$. Supposons que ce soit vrai pour tout $(\alpha', \beta') < (\alpha, \beta)$. On écrit $\alpha = \omega^{\gamma_1} k_1 + \ldots + \omega^{\gamma_n} k_n$ et $\beta = \omega^{\gamma_1} l_1 + \ldots + \omega^{\gamma_n} l_n$ comme dans l'énoncé. Par symétrie, on peut supposer que $l_n > 0$. Alors par l'observation précédente, on a : $\alpha \oplus^* \beta \geq (\alpha \oplus^* \omega^{\gamma_1} l_1 + \ldots + \omega^{\gamma_n}(l_n - 1)) + \omega^{\gamma_n}$.
   Par hypothèse de récurrence, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\alpha \oplus^* \beta &\geq (\alpha \oplus \omega^{\gamma_1} l_1 + \ldots + \omega^{\gamma_n}(l_n - 1)) + \omega^{\gamma_n} \\
&\geq \omega^{\gamma_1}(k_1 + l_1) + \cdots + \omega^{\gamma_n}(k_n + l_n - 1) + \omega^{\gamma_n} \\
&\geq \omega^{\gamma_1}(k_1 + l_1) + \cdots + \omega^{\gamma_n}(k_n + l_n).
\end{aligned}$$