

TD de Logique 3 (Cardinaux et cofinalité)

11 et 14 octobre 2013

Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personnelle (voir ci-dessus).

Exercice 1 (Cofinalité) :

1. Soient κ et λ deux cardinaux infinis, montrer que $\text{cof}(\kappa) \leq \lambda$ si et seulement s'il existe une suite $(\kappa_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ de cardinaux strictement plus petits que κ telle que $\kappa = \sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$.
2. Soient κ un cardinal infini et $\lambda < \text{cof}(\kappa)$, montrer que toute application croissante de κ dans λ est stationnaire (constante à partir d'un certain rang).
3. Déterminer la cofinalité de $\omega^2, \omega^\omega, \omega^\alpha, \alpha + \beta, \aleph_{\omega^\alpha}$.

Exercice 2 :

Soit X un sous-ensemble non-borné de \aleph_1 . Montrer que $(X, <)$ est isomorphe à $(\aleph_1, <)$.
Qu'en est-il pour κ cardinal régulier quelconque ?

Exercice 3 :

Soient κ et λ deux cardinaux infinis avec $\kappa \geq \lambda$, montrer que l'ensemble des parties de κ de cardinalité $\leq \lambda$ a pour cardinalité κ^λ .

Exercice 4 :

Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal régulier et G un groupe de cardinalité κ . On énumère $G = \{a_i : i < \kappa\}$. Pour $\beta < \kappa$, on note $A_\beta = \{a_i : i < \beta\}$.

1. Montrer que pour tout $\alpha < \kappa$, il existe $\beta < \kappa$ tel que le groupe engendré par A_α soit inclus dans A_β .
2. Montrer que pour tout $\alpha < \kappa$, il existe $\beta \geq \alpha$ tel que A_β est un sous-groupe de G .

Exercice 5 (Exponentielle cardinale sous (HGC)) :

On rappelle que l'hypothèse du continu généralisée (HGC) est l'énoncé : pour tout cardinal infini κ , $2^\kappa = \kappa^+$.

1. Montrer que pour κ, λ des cardinaux non nuls, on a $\kappa^\lambda \leq 2^{\kappa \cdot \lambda}$.
2. Soient κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul, montrer que $(\kappa^+)^{\lambda} = \kappa^+ \kappa^\lambda$. (On distinguera les cas $\lambda \geq \kappa^+$ et $\lambda \leq \kappa$.)
3. Soient n un entier et λ un cardinal non nul, montrer que $\aleph_n^\lambda = \aleph_n 2^\lambda$.
4. On suppose (HGC). Soient κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul, montrer que :

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{si } \lambda < \text{cof}(\kappa) \\ \kappa^+ & \text{si } \text{cof}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \\ \lambda^+ & \text{si } \kappa \leq \lambda \end{cases}$$

Exercice 6 (Ensembles clos cofinaux) :

Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal régulier. Un ensemble $C \subseteq \kappa$ est un *club* (closed unbounded) s'il est clos et cofinal, c'est-à-dire s'il est cofinal dans κ et pour tout $A \subset C$, $\sup(A) \in C \cup \{\kappa\}$.

Un ensemble $S \subseteq \kappa$ est dit *stationnaire* s'il intersecte tous les clubs.

1. Soient $\lambda < \kappa$ et $(C_i)_{i < \lambda}$ une famille de clubs, montrer que $\bigcap_{i < \lambda} C_i$ est un club.

2. Soit $(C_i)_{i < \kappa}$ une famille de clubs, montrer que l'intersection diagonale $\Delta_{i < \kappa} C_i := \{\alpha < \kappa : \alpha \in \bigcap_{i < \alpha} C_i\}$ est un club.
3. (Lemme de Fodor) Soit $S \subseteq \kappa$ un ensemble stationnaire et $f : S \rightarrow \kappa$ une fonction régressive (c'est-à-dire telle que $f(\alpha) < \alpha$ pour tout $\alpha \in S$). Montrer qu'il existe un ensemble stationnaire $T \subseteq S$ tel que f soit constante sur T .
(Indication : raisonner par l'absurde.)

Exercice 7 (Théorème de Solovay) :

Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal régulier et soit $S \subseteq \kappa$ un ensemble stationnaire. On veut montrer le théorème de Solovay : S peut s'écrire comme réunion de κ ensembles stationnaires deux-à-deux disjoints.

1. Pour $\lambda < \kappa$ un cardinal, on note $E_\lambda^\kappa = \{\alpha < \kappa : \text{cof}(\alpha) = \lambda\}$. Montrer le théorème de Solovay dans le cas où $S \subseteq E_\omega^\kappa$.
(Indication : Écrire, pour $\alpha \in S$, $\alpha = \lim_{n < \omega} a_n^\alpha$. Définir à partir de là une fonction régressive et appliquer le Lemme de Fodor.)
2. Montrer le théorème de Solovay dans le cas où $S \subseteq \{\alpha < \kappa : \text{cof}(\alpha) < \alpha\}$.
3. Supposons que S est un ensemble de cardinaux réguliers. Montrer que

$$T = \{\alpha \in S : S \cap \alpha \text{ n'est pas stationnaire dans } \alpha\}$$

est stationnaire.

(Indication : Raisonner par l'absurde. Remarquer que si C est un club, l'ensemble $C' \subset C$ des limites de points de C est encore un club.)

4. Montrer le théorème de Solovay dans le cas général.
(Indication : Se ramener au cas de la question 3. Pour $\alpha \in T$, on peut considérer une suite strictement croissante continue $(a_\xi^\alpha : \xi < \kappa)$ tendant vers α telle que $a_\xi^\alpha \notin S$. Adapter alors la preuve de 1.)

Exercice 8 (Nombre de Dedekind) :

Soit $(I, <)$ un ordre total. Voici quelques notions qu'on utilisera dans cet exercice.

- Soient $\Gamma, \Delta \subseteq I$ des parties de I . La paire (Γ, Δ) est une *coupure* de I si $\Gamma \cup \Delta = I$, $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$ et $\gamma < \delta$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\delta \in \Delta$.
- Si $A \subseteq I$ et $i \in I \setminus A$, la coupure induite par i dans $(A, <)$ est donnée par (Γ_i, Δ_i) , où $\Gamma_i := \{a \in A \mid a < i\}$ et $\Delta_i = \{a \in A \mid i < a\}$.
- La cofinalité d'une coupure (Γ, Δ) , notée $\text{cof}(\Gamma, \Delta)$, est la paire de cardinaux (κ, λ) telle que

$$\kappa = \min\{|G| \mid G \subseteq \Gamma \text{ est cofinal dans } \Gamma\} \text{ et } \lambda = \min\{|D| \mid D \subseteq \Delta \text{ est coinitial dans } \Delta\}.$$

(Ici, $D \subseteq \Delta$ est dit *coinital* dans Δ si pour tout $\delta \in \Delta$ il existe $d \in D$ tel que $d \leq \delta$.)

- Une partie $A \subseteq I$ est *dense* dans I si elle est cofinale et coinital dans I , et si pour tout $i < j < k$ dans I il existe $a \in A$ tel que $i < a < k$.
 1. a) Soit $(I, <)$ un bon ordre. Décrire toutes les coupures dans I , et montrer que $|C(I)| = 1 + |I|$, où $C(I)$ dénote l'ensemble des coupures dans I .
b) Construire un ordre total $(I, <)$ et des coupures (Γ_1, Δ_1) et (Γ_2, Δ_2) dans I tels que $|I| = \aleph_\omega$, $\text{cof}(\Gamma_1, \Delta_1) = (1, \aleph_2)$ et $\text{cof}(\Gamma_2, \Delta_2) = (\aleph_1, \aleph_0)$.
c) Déterminer les triplets de cardinaux (κ, λ, μ) pour lesquels il existe un ordre total $(I, <)$ et une coupure (Γ, Δ) dans I tels que $|I| = \mu$ et $\text{cof}(\Gamma, \Delta) = (\kappa, \lambda)$.
 2. Soient κ et λ deux cardinaux infinis. Sur κ^λ on considère l'ordre défini ainsi : $a = (a_i)_{i < \lambda} < b = (b_i)_{i < \lambda}$ si $a \neq b$ et si $a_{i_0} < b_{i_0}$, où $i_0 = \min\{i \in \lambda \mid a_i \neq b_i\}$. On observe qu'il s'agit d'un ordre total. Soit $\kappa^{<\lambda} := \{(a_i)_{i < \lambda} \in \kappa^\lambda \mid \text{il existe } \delta < \lambda \text{ tel que } a_i = 0 \text{ pour tout } i \geq \delta\}$.
a) Montrer que $\kappa^{<\lambda}$ est dense dans κ^λ .
b) Déterminer les cofinalités possibles d'une coupure induite par un élément $a \in \kappa^\lambda \setminus \kappa^{<\lambda}$ dans $\kappa^{<\lambda}$.

3. Pour κ un cardinal infini, on définit le *nombre de Dedekind* de κ , noté $\text{Ded}(\kappa)$, comme

$$\text{Ded}(\kappa) = \sup\{|I| \mid \langle I, < \rangle \text{ est un ordre total contenant une partie dense de cardinal } \kappa\}.$$

- a) Dédire de la partie (2) que pour tout κ infini on a $\text{Ded}(\kappa) \geq \kappa^+$.
- b) Soit $A \subseteq I$ une partie dense. Montrer l'inégalité suivante :

$$|I| \leq |\{(\Gamma, \Delta) \mid (\Gamma, \Delta) \text{ est une coupure dans } \langle A, < \rangle\}|.$$

- c) En déduire que $\text{Ded}(\kappa) \leq 2^\kappa$ pour tout κ . En particulier, $\text{Ded}(\kappa)$ existe.
- d) Montrer que $\text{Ded}(\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.
- e) Montrer qu'il existe un ordinal α limite tel que $\text{Ded}(\aleph_\alpha) > \sup_{\beta < \alpha} \text{Ded}(\aleph_\beta)$.

Exercice 9 (Qui sont ces charmants messieurs ?) :

