Silvain Rideau
Bureau T7

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 3 (Cardinaux et cofinalité)

15 octobre 2012

Exercice 4 :

1. On considère l'ensemble $K(\alpha) \subseteq \kappa$ défini comme l'ensemble des $l < \kappa$ tels qu'il existe $i, j < \alpha$ satisfaisant $a_i + a_i = a_l$ ou $-a_i = a_l$. Alors $K(\alpha)$ a pour cardinalité $\alpha|\aleph_0|$. En particulier, comme κ est régulier, il n'est pas cofinal dans κ. Soit β un ordinal tel que $\alpha \geq \beta$ et $K(\alpha) \subseteq \beta$. Le groupe engendré par A_α est inclu dans A_β.
2. Soit f qui a α associe le plus petit ordinal tel que le groupe engendré par A_α soit inclu dans A_β et soit $\beta = \sup_n f^n(\alpha)$. Comme κ est régulier, on a $\beta < \kappa$ et A_β est un sous-groupe de G. En effet, si on prend $a_i, a_j \in A_\beta$, alors $a_i, a_j \in A_{f^n(\alpha)}$ pour un certain n, et $a_i + a_j \in A_{f^{n+1}(\alpha)}$.

Exercice 5 (Ensembles clos cofinaux) **:**
Voir le TD suivant.

Exercice 6 (Théorème de Solovay) **:**

1. Supposons $S \subseteq E^\kappa_\omega$. Pour tout $\alpha \in S$, il existe une suite strictement croissante $(a^\alpha_n : n < \omega)$ tendant vers α.

   Lemme 6 :
   Il existe $n < \omega$ tel que pour tout $\eta < \kappa$, $S_{\eta,n} := \{\alpha \in S : a^\alpha_n > \eta\}$ est stationnaire dans κ.

   Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors pour tout n, il existe $\eta_n < \kappa$ et un club C_n tel que $S_{\eta,n} \cap C_n = \emptyset$. Comme κ est indénombrable, l'intersection $C = \bigcap_{n<\omega} C_n$ est encore un club. On pose $\eta = \sup_{n<\omega} \eta_n$, alors $\eta < \kappa$. Comme S est stationnaire, il existe $\alpha \in S \cap C$, $\alpha > \eta + \omega$. Par hypothèse, la suite $(a^\alpha_n)_{n<\omega}$ tend vers α. Donc il existe n tel que $a^\alpha_n > \eta$. Ainsi $\alpha \in S_{\eta,n}$ ce qui contredit le fait que $S_{\eta,n}$ est disjoint de C. ∎

   Fixons maintenant n tel que $S_{\eta,n}$ soit stationnaire pour tout $\eta < \kappa$. On définit une fonction $f : S \to \kappa$ par $f(\alpha) = a^\alpha_n$. Alors f est régressive. On construit par récurrence une suite strictement croissainte $(\eta_\alpha : \alpha < \kappa)$ et des ensembles stationnaire $(T_\alpha : \alpha < \kappa)$ de la manière suivante.
   Soit $\alpha < \kappa$. On pose $\eta = \sup\{\eta_\beta : \beta < \alpha\}$ (et $\eta = 0$ si $\alpha = 0$). On a $\eta < \kappa$ car κ est régulier. Par hypothèse sur n, l'ensemble $S_{\eta,n}$ est stationnaire. Par le lemme de Fodor, il existe γ tel que $T := f^{-1}(\{\gamma\}) \cap S_{\eta,n}$ est stationnaire. On pose alors $\eta_\alpha = \gamma$ et $T_\alpha = T$.
   Par récurrence immédiate, la suite $(\eta_\alpha : \alpha < \kappa)$ ainsi construite est strictement croissante et les T_α sont disjoints deux-à-deux. De plus, les T_α sont stationnaires. On a donc obtenu la décomposition voulue.
2. On remarque tout d'abord que l'argument utilisé dans la question 1. se généralise immédiatement au cas où $S \subset E^\kappa_\lambda$ pour un $\lambda < \kappa$.
   Considérons la fonction f qui à $\alpha \in S$ associe $\mathrm{cof}(\alpha)$. Par hypothèse, c'est une fonction régressive. Par lemme de Fodor, il existe $T \subseteq S$ sur lequel elle est constante, égale à un $\lambda < \kappa$. Alors par la remarque précédente, T s'écrit comme réunion disjointe de κ ensembles stationnaires, donc S aussi.
3. Supposons que T ne soit pas stationnaire et soit $C \subset \kappa$ un club tel que $T \cap C = \emptyset$. Soit $C' \subseteq C$ l'ensemble des points qui sont limites de points de C. Alors C' est un club dans κ. Comme S est stationnaire, $S \cap C'$ est non vide. Soit α son plus petit élément. Alors α est un cardinal régulier. Par définition de C', $C \cap \alpha$ est un club dans α, donc $C' \cap \alpha$ aussi. Or S est disjoint de $C' \cap \alpha$, donc $\alpha \in T$. Contradiction.
4. On peut supposer que S n'est constitué que d'ordinaux limites, car les ordinaux limites forment un club. Par les questions précédentes, on peut de plus supposer que

$$T := \{\alpha \in S : \alpha \text{ est un cardinal régulier et } S \cap \alpha \text{ n'est pas stationnaire dans } \alpha\}$$

est stationnaire (sinon son complémentaire dans S l'est et on peut appliquer 2.). On suit alors de près la preuve de 1.

Pour $\alpha \in T$, il existe une suite croissante continue $(a^\alpha_\xi : \xi < \alpha)$ telle que $a^\alpha_\xi \notin S$ et $\lim_{\xi \to \alpha} a^\alpha_\xi = \alpha$.

Lemme 7 :

Il existe $\xi < \kappa$ tel que pour tout $\eta < \kappa$, $T_{\eta,\xi} := \{\alpha \in T : a^\alpha_\xi > \eta\}$ est stationnaire dans κ.

Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas. Pour tout $\xi < \kappa$, il existe alors $\eta_\xi < \kappa$ et un club $C_\xi \subset \kappa$ tel que $T_{\eta_\xi,\xi} \cap C_\xi = \varnothing$. Soit C l'intersection diagonale des C_ξ. On sait que C est un club. Soit D l'ensemble des $\alpha < \kappa$ tels que $\eta_\xi < \alpha$ pour tout $\xi < \alpha$. Alors D est un club (exercice...), donc $C \cap D$ aussi. On peut donc trouver $\gamma < \alpha$ deux éléments de $C \cap D \cap T$. On a alors, pour $\xi < \gamma$, $a^\alpha_\xi < \gamma$. Donc $a^\alpha_\gamma = \gamma$ (souvenez-vous que γ est un cardinal régulier). Ceci contredit le fait que $a^\alpha_\gamma \notin S$. ■

Le lemme étant acquis, on finit la preuve exactement comme en 1.