Silvain Rideau
Bureau T7

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 4

22 octobre 2012

Les exercices précédés d'une ✠ sont là pour vous aider à comprendre le cours et devront être fait avant le TD pour être corrigé au début du TD. Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

(✠) **Exercice 1** (Ordres) **:**

1. Donner les axiomes d'ordre strict (total) dans le langage $\mathcal{L} = \{=, <\}$.
2. Donner les axiomes d'ordre strict total dense (i.e. tels que, pour tout x, $x = \sup\{y \mid y < x\} = \inf\{y \mid y > x\}$).
3. Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé φ_1 qui est vrai dans $(\mathbb{Z}, <)$ et faux dans $(\mathbb{Q}, <)$.
4. Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé φ_2 qui est vrai dans $(\mathbb{Z}, <)$ et faux dans $(\mathbb{N}, <)$.
5. Soient $n \neq m$ deux entiers. Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé φ_3 qui est vrai dans $(\omega \cdot n, <)$ et faux dans $(\omega \cdot m, <)$.
6. Même question en prenant $(\omega^2, <)$ et $(\omega^3, <)$.

Exercice 2 (Rappel de la feuille précédente : Ensembles clos cofinaux) **:**
Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal régulier. Un ensemble $C \subseteq \kappa$ est un *club* (closed unbounded) s'il est clos et cofinal, c'est-à-dire s'il est cofinal dans κ et pour tout $A \subset C$, $\sup A \in C \cup \{\kappa\}$.
Un ensemble $S \subseteq \kappa$ est dit *stationnaire* s'il intersecte tous les clubs.

1. Soient $\lambda < \kappa$ et $(C_i)_{i<\lambda}$ une famille de clubs, montrer que $\bigcap_{i<\lambda} C_i$ est un club.
2. Soit $(C_i)_{i<\kappa}$ une famille de clubs, montrer que l'intersection diagonale $\triangle_{i<\kappa} C_i := \{\alpha < \kappa : \alpha \in \bigcap_{i<\alpha} C_i\}$ est un club.
3. (Lemme de Fodor) Soit $S \subseteq \kappa$ un ensemble stationnaire et $f : S \to \kappa$ une fonction régressive (c'est-à-dire telle que $f(\alpha) < \alpha$ pour tout $\alpha \in S$). Montrer qu'il existe un ensemble stationnaire $T \subseteq S$ tel que f soit constante sur T.
   (Indication : raisonner par l'absurde.)

Exercice 3 (Ordinaux non-élémentairement équivalents) **:**
Montrer que $(\alpha, <)$ et $(\beta, <)$ pour $\alpha, \beta < \omega^\omega 2$, $\alpha \neq \beta$ ne sont pas élémentairement équivalents.

Exercice 4 (Axiomatique des corps) **:**
Soit $\mathcal{L}$ le language constitué des symboles $\{+, -, 0, \times, 1\}$ (où $-$ est une fonction unaire).

1. Donner les axiomes des corps dans $\mathcal{L}$.
2. Soit p un nombre premier, donner un $\mathcal{L}$-axiome qui précise que le corps est de caractéristique p.
3. Peut-on axiomatiser dans $\mathcal{L}$ la théorie des corps de caractéristique 0 ?
4. Peut-on axiomatiser dans $\mathcal{L}$ la théorie des corps algébriquement clos ?
5. Donner un $\mathcal{L}$-énoncé vrai dans $\mathbb{R}$ et faux dans $\mathbb{Q}$.
6. L'ordre sur $\mathbb{R}$ est-il définissable dans $\mathcal{L}$?

Exercice 5 (Systèmes de connecteurs) **:**
On dit qu'un système de connecteurs $\{c_1, \ldots, c_n\}$ est complet si tout formule propositionnelle est équivalente à une formule n'utilisant que les c_i.

1. Montrer que le système $\{\wedge, \neg\}$ est complet.
2. Montrer que le système $\{\iff, \neg\}$ n'est pas complet.

3. Trouver un système de 8 connecteurs (deux à deux distincts) qui ne soit pas complet.

Exercice 6 (Structures finies) **:**
Soit $\mathcal{M}$ une structure finie et $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe des formules $\varphi_1[x_1, \ldots, x_k]$ telles que pour toute formule $\varphi[x_1, \ldots, x_k]$, il existe i tel qu'on ait $\mathcal{M} \vDash \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff \varphi_i[m_1, \ldots, m_k]$.
2. Supposons $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$, et soient φ_j telles qu'à la question 1 pour $k = n$. Montrer qu'on peut écrire $N = \{n_1, \ldots, n_n\}$, avec, pour tout j, $\mathcal{M} \vDash \varphi_j[m_1, \ldots, m_n]$ si et seulement si $\mathcal{N} \vDash \varphi_j[n_1, \ldots, n_n]$.
3. Conclure que $\mathcal{N} \simeq \mathcal{M}$.

Exercice 7 (Préservation) **:**

1. Un énoncé est universel si il s'écrit $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi[x_1, \ldots, x_n]$ où φ est sans quantificateurs. Montrer que si φ est universel et $\mathcal{M} \vDash \varphi$, alors φ est vrai dans toute sous-structure de $\mathcal{M}$.
2. Un énoncé est existentiel si il s'écrit $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi[x_1, \ldots, x_n]$ où φ est sans quantificateurs. Montrer que si φ est existentiel et $\mathcal{M} \vDash \varphi$, alors φ est vrai dans toute sur-structure de $\mathcal{M}$.
3. Soit $(I, <)$ un ensemble ordonné filtrant, i.e. si $i, j \in I$, il existe k tel que $i \leq k$ et $j \leq k$, $\mathcal{L}$ un language et $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ des $\mathcal{L}$-structures telles que $\mathcal{M}_i$ sous-structure de $\mathcal{M}_j$ si $i \leq j$. Montrer qu'on peut munir $\bigcup_i M_i$ d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ telle que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$.
4. Soit φ un énoncé $\forall\exists$, i.e. φ s'écrit de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m \psi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ où ψ est sans quantificateurs. Montrer que si φ est vrai dans tout les $\mathcal{M}_i$ alors φ est vrai dans dans $\mathcal{M}$ (avec les notations de la question précédente).

Les réciproques de ces propriétés de préservations sont vraies, mais on attendra la semaine prochaine pour le montrer.

Exercice 8 (Clôture algébrique) **:**
Soit $\mathcal{L}$ un language et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{L}$-structure et $A \subset M$. On dit que $d \in M$ est A-algébrique s'il existe $\varphi[x, y_1, \ldots, y_n]$ et $a_1, .., a_n \in A$ tels que $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \vDash \varphi[d, a_1, .., a_n]$. et il y a un nombre fini d'éléments $d' \in M$ pour lesquels $\mathcal{M} \vDash \varphi[d', a_1, .., a_n]$. On note $acl_M(A)$ l'ensemble des éléments de M A-algébriques.

1. Montrer que $|acl_M(A)| \leq \max\{|A|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.
2. Montrer que si $A \subseteq B$, alors $acl_M(A) \subseteq acl_M(B)$.
3. Montrer que $acl_M(acl_M(A)) = acl_M(A)$.
4. Montrer que si $d \in acl_M(A)$, alors $d \in acl_M(A_0)$ pour un $A_0 \subseteq A$ fini.
5. Soit σ un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui fixe A, montrer que d a une orbite finie sous σ, i.e. $\{\sigma^n(d) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini.
6. Soit $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <)$, déterminer $acl_m(\mathbb{Q})$?