Silvain Rideau
Bureau T7
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 5 (Compacité)

29 octobre 2012

Les exercices précédés d'une ✠ sont là pour vous aider à comprendre le cours et devront être fait avant le TD pour être corrigé au début du TD. Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

(✠) **Exercice 1** (Propriétés axiomatisables) **:**
Parmi les classes de structures suivantes, déterminer celles dont la théorie est finiment axiomatisable (i.e. avec un nombre fini d'axiomes), axiomatisable (mais pas finiment), ou non axiomatisable :

1. Les ensembles infinis (dans le langage de l'égalité),
2. Les ensembles finis,
3. Les corps de caractéristique non nulle (dans le langage des anneaux),
4. Les corps de caractéristique nulle,
5. Les ensembles biens ordonnés (dans le langage des ordres).

Exercice 2 (Coloriage de graphes) **:**
Soit k un entier. Un graphe G est dit k-coloriable s'il existe un coloriage des sommets de G avec k couleurs des telle sorte à ce que deux sommets adjacents ne soient jamais de la même couleur.
Montrer qu'un graphe infini est k-coloriable si et seulement si tous ses sous-graphes finis le sont.
(Indication : appliquer le théorème de compacité à un ensemble d'énoncés bien choisi.)

Exercice 3 (Groupes pseudo-finis) **:**
Soit $(G_i)_{i\in I}$ des groupes finis que l'on étudie dans le langage $\{\times, 1, .^{-1}\}$. On note $T_0 = \{\text{énoncés } \varphi \mid \forall i\ G_i \vDash \varphi\}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les G_i pour que T_0 admette des modèles infinis.
2. Supposons que T_0 admette des modèles infinis, donner une axiomatisation T des modèles de T_0 qui sont infinis. Montrer que ce sont des groupes.
3. Montrer qu'un énoncé φ est conséquence de T si et seulement s'il existe n tel que φ soit vrai dans tous les G_i de cardinal plus grand que n.

Exercice 4 (Modèles non standards) **:**
Soit $\mathcal{L}_{ar} = \{0, s, +, -, \times, 1, <\}$ et notons $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, s, +, \times, 1, <)$ où les symboles ont leurs interprétations standards (s est la fonction successeur). On note $\overline{n} = s^n(0)$.
On note $T = \mathrm{Th}(\mathbb{N})$.

1. Montrer qu'il existe $\mathcal{M} \vDash T$ et $a \in M$ tel que $a > \overline{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'on peut de plus supposer ce a divisible par tout $\overline{n}$ ($n \neq 0$ bien entendu).
2. Soit $\varphi[x]$ une formule telle que $\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{n}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout $a \in M$, $\mathcal{M} \vDash \varphi[a]$.
3. En déduire que $\{\overline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas définissable dans $\mathcal{M}$.

Exercice 5 (Préservation, le retour) **:**
Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. On note $\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup M$, $\mathcal{M}_M$ la $\mathcal{L}_M$-structure où chaque constante $m \in M$ est interprétée par elle-même, et $\Delta(M) = \{\varphi\ \mathcal{L}_M\text{-énoncé sans quantificateurs} \mid \mathcal{M}_M \vDash \varphi\}$.
Soit T une théorie, on note $T_\forall = \{\varphi \text{ énoncé universel} \mid T \vDash \varphi\}$.

1. Montrer qu'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$ est modèle de $\Delta(M)$ si et seulement si $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$ (à isomorphisme près).

2. Montrer que $\mathcal{N} \vDash T_\forall$ si et seulement si il existe $\mathcal{M}$ modèle de T telle que $\mathcal{N}$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$.
3. En déduire que si T est stable par sous-structure, i.e. si $\mathcal{M} \vDash T$ et $\mathcal{N}$ sous-structure de $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{N} \vDash T$, T est équivalente à $T_\forall$.
4. Soit φ un $\mathcal{L}$-énoncé, montrer que si φ est préservée par sur-structure (i.e. $\mathcal{M} \vDash \varphi$ et $\mathcal{M}$ sous-structure de $\mathcal{N}$, alors $\mathcal{N} \vDash \varphi$) alors φ est équivalente à un énoncé existentiel.

Exercice 6 (Ultrafiltres, ultraproduits et compacité) **:**

1. Soit X un ensemble, on appel filtre sur X un ensemble $F \subseteq \mathfrak{P}(X)$ tel que :
   a) $X \in F$ et $\varnothing \notin F$,
   b) Pour tout $I, J \in F$, $I \cap J \in F$,
   c) Pour tout $I \in F$ et $J \subseteq X$ tel que $I \subseteq J$, $J \in F$.

   Montrer que si X est infini, l'ensemble des parties de complémentaire fini de X forment un filtre.
2. Un ensemble non vide B de parties non vides de X est une base de filtre si l'intersection de toute famille finie d'éléments de B est dans B. Montrer que toute base de filtre est contenue dans un filtre.
3. Un ultrafiltre est un filtre maximal (i.e. qui n'est strictement inclus dans aucun autre filtre), montrer qu'un filtre F est un ultrafiltre si et seulement si pour toute partie I de X, I ou $X \setminus I$ est dans F.
4. Montrer que tout filtre est inclus dans un ultrafiltre (utiliser le lemme de Zorn).
5. Soit $(\mathcal{M}_x)_{x \in X}$ des $\mathcal{L}$-structures et F un filtre de X, on définit la relation $\equiv_F$ sur $\prod_{x \in X} M_x$ par $(a_x) \equiv_I (b_x)$ si $\{x \in X \mid a_x = b_x\} \in F$. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
6. On munit $\mathcal{M} = \prod M_x / \equiv_F$ d'une $\mathcal{L}$-structure en posant $f(\widetilde{a}^1, \dots, \widetilde{a}^n) = (f(a_x^1, \widetilde{\dots, a_n^x}))_{x \in X}$ et $R(\widetilde{a}^1, \dots, \widetilde{a}^n)$ si et seulement si $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash R(a_x^1, \dots, a_x^n)\} \in F$. Montrer que cette $\mathcal{L}$-structure est bien définie.
7. Supposons que F soit un ultrafiltre, montrer que pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi[x_1, \dots, x_n]$, $\mathcal{M} \vDash \varphi[\widetilde{a}^1, \dots, \widetilde{a}^n]$ si et seulement si $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash \varphi[a_x^1, \dots, a_x^n]\} \in F$.
8. En déduire une nouvelle preuve du théorème de compacité.