Silvain Rideau
Bureau T7

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 5

29 octobre 2012

Exercice 3 (Groupes pseudo-finis) **:**

1. Montrons que $\sup\{|G_i|\} = \omega$ est nécessaire et suffisant. En effet si $\sup\{|G_i|\} = n < \omega$, l'énoncé $\varphi_n = \forall x_0 \forall x_n \bigvee_{i<j} x_i = x_j$ est vraie dans tout G_i et est donc dans T_0 que ne peut donc avoir de modèle de cardinal plus grand que n.
   Réciproquement, si $\sup\{|G_i|\} = \omega$, la théorie $T = T_0 \cup \{\neg\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est consistante, i.e. T_0 admet un modèle infini. En effet, par compacité, il suffit de considérer $T' \subseteq T$ fini, i.e. $T' \subseteq T_0 \cup \{\neg\varphi_n \mid n < m\}$. Mais alors tout G_i de cardinal strictement plus grand que m est modèle de T'.
2. La théorie T de la question précédente fait l'affaire. De plus, tous les G_i étant des groupes, ils sont tous modèles des énoncés de la théorie des corps qui est donc incluse dans T_0, i.e tout modèle de T_0 et donc a fortiori ses modèles infinis sont des groupes.
3. Par le théorème de compacité, tout énoncé φ qui est conséquence de T est conséquence d'une partie finie de T qui est donc incluse dans $T_0 \cup \{\neg\varphi_n \mid n < m\}$. L'énoncé φ est donc vérifié dans tout G_i de cardinal strictement plus grand que m. Réciproquement, si φ est vrai dans tous les $G_i$de cardinal plus grand qu'un certain m, alors la formule $\varphi_m \to \varphi$ est vraie dans tous les G_i et est donc vraie dans tout modèle de T_0. Les modèles infinis de T_0 étant tous modèles de φ_m, il s'en suit que φ est vraie dans tout modèle de T.

Exercice 5 (Préservation, le retour) **:**

1. Voir le cours sur les diagrammes.
2. Soit $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M} \vDash T$ et $\varphi = \forall x_1 \forall x_n\, \psi[x_1, \ldots, x_n]$ universelle (où ψ est sans quantificateurs) conséquence de T. Comme $\mathcal{M} \vDash T$, on a aussi $\mathcal{M} \vDash \varphi$. Pour tout $c_1, \ldots, c_n \in N$, on a alors $\mathcal{M} \vDash \varphi[c_1, \ldots, c_n]$ et donc $\mathcal{N} \vDash \varphi[c_1, \ldots, c_n]$.
   Réciproquement soit $\mathcal{N} \vDash T_\forall$ et soit $T' = \Delta(\mathcal{N}) \cup T$. Soit $T_0 \subseteq T'$ fini. Comme $\Delta(\mathcal{N})$ clos par conjonction finie, on peut supposer $T_0 = \{\varphi[c_{n_1}, \ldots, c_{n_k}]\} \cup T$ où les c_{n_i} n'apparaissent pas dans T et $\mathcal{N} \vDash \varphi[n_1, \ldots, n_k]$. Si T_0 était inconsistante, par un résultat du cours, on aurait $T \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \neg\varphi[x_1, \ldots, x_k]$ et donc, comme $\mathcal{N} \vDash T_\forall$, $\mathcal{N} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \neg\varphi[x_1, \ldots, x_k]$ et donc $\mathcal{N} \vDash \neg\varphi[n_1, \ldots, n_k]$, ce qui est absurde.
   Un modèle de T' étant exactement un modèle de T dans lequel se plonge $\mathcal{N}$, on a bien montré le résultat voulu.
3. Comme $T_\forall$ est universelle il est évident que $T_\forall$ (et donc T) qui lui est équivalente est stable par sous-structure. Réciproquement, comme $T_\forall$ est conséquence de T par définition, il suffit de montrer que T est conséquence de $T_\forall$. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $T_\forall$. Par la question précédente $\mathcal{M}$ se plonge dans $\mathcal{N} \vDash T$. Mais comme T est stable par sous-structure, $\mathcal{M} \vDash T$.
4. L'énoncé $\neg\varphi$ est préservé par sous-structure, en effet si $\mathcal{M} \vDash \neg\varphi$ et $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ alors si on a pas $\mathcal{N} \vDash \neg\varphi$, il s'en suit que $\mathcal{N} \vDash \varphi$ et donc, par hypothèse sur φ, $\mathcal{M} \vDash \varphi$, ce qui est absurde. Par la question précédente (et le théorème de compacité), il existe une formule universelle ψ qui soit équivalente à $\neg\varphi$ et donc $\neg\psi$ qui est existentielle est équivalente à φ.
   On pourrait aussi démontrer l'équivalent de la question précédente (i.e. avec une théorie plutôt qu'une formule) dans le cas existentiel, mais ce n'est pas une conséquence immédiate de la question précédente et nécessite sa propre démonstration (utilisant le même genre de techniques que Lowenheim-Skolem descendant).

Exercice 6 (Ultrafiltres, ultraproduits et compacité) **:**

1. L'ensemble vide étant fini, X étant infini, une union de deux ensembles finis étant elle même finie et les sous-ensembles d'un ensemble fini étant finis, par passage au complémentaire on a les propriétés voulues sur les cofinis.

2. Soit $F = \{Y \subseteq X \mid \exists b \in B,\ b \subseteq Y\}$. Tout filtre qui contient B doit contenir F par (c), et on peut vérifier que F est un filtre. En effet l'ensemble vide n'appartient pas à B, il ne peut contenir aucun élément de B. Comme B est non vide, on a bien $X \in F$. Si $Y_i \supseteq b_i$ sont des éléments de F, alors $Y_1 \cap Y_2 \supseteq b_1 \cap b_2$ qui est bien dans B et enfin si $Y \supseteq b$ est dans F et qu'on a $Z \supseteq Y$, on a alors $Z \supseteq b$.
3. Soit F un filtre et supposons que ni I ni $X \setminus I$ ne soit dans F alors $\{I \cap J \mid J \in F\}$ forme une base de filtre. En effet cet ensemble est non vide (il contient I) et si on avait $I \cap J = \varnothing$ pour un $J \in F$, on aurait $X \setminus I \supseteq J$ et donc $X \setminus I \in F$ ce qui contredit notre hypothèse. Enfin, si $J_i \in F$, $(I \cap J_1) \cap (I \cap J_2) = I \cap (J_1 \cap J_2)$ où $J_1 \cap J_2$ est aussi dans F.

   Par la question précédente, il existe un filtre F' qui contient cette base de filtre, et $F \subsetneq F'$ et donc F ne peut être maximal.
4. Montrons que l'ensemble des filtres sur X est inductif pour l'inclusion. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une chaîne de filtres. Posons $F = \bigcup_i F_i$. Il est alors évident que F contient X et ne contient pas $\varnothing$. Soient $I, J \in F$, alors il existe $i \in I$ tel que $I, J \in F_i$ et donc $I \cap J \in F_i \subseteq F$. Enfin si $I \in F$ alors $I \in F_i$ pour un certain i et donc pour $J \supseteq I$ est aussi dans $F_i \subseteq F$.

   Par le lemme de Zorn, il existe un filtre maximal pour l'inclusion.
5. Comme $\{x \mid a_x = a_x\} = X \in I$ la relation est bien réflexive. De même, comme $\{x \mid a_x = b_x\} = \{x \mid b_x = a_x\}$, cette relation est symétrique. Enfin, supposons $a \equiv_F b \equiv_F c$. Comme $\{x \mid a_x = c_x\} \supseteq \{a_x = b_x\} \cap \{b_x = c_x\}$, on a bien $\{x \mid a_x = c_x\} \in F$ et donc la relation est transitive.
6. Supposons $a^i \equiv_F b^i$, comme un filtre et clos par intersection finie $\{x \in X \mid \forall i,\ a^i_x = b^i_x\} \in F$ et il est contenu dans l'ensemble $\{x \in X \mid f(a^1_x, \dots, a^n_x) = f(b^1_x, \dots, b^n_x)\}$ qui est donc bien aussi dans F, i.e. $(f(a^1_x, \dots, a^n_x))_{x \in X} \equiv_F (f(b^1_x, \dots, b^n_x))_{x \in X}$ et donc f est induit bien une fonction sur $\prod M_x/F$.

   De même si $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash R(a^1_x, \dots, a^n_x)\} \in F$, son intersection avec $\{x \in X \mid \forall i,\ a^i_x = b^i_x\}$ est aussi dans F et est contenu dans $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash R(b^1_x, \dots, b^n_x)\}$ qui est donc lui-aussi dans F. L'interprétation que l'on a donné de R dans $\prod M_x/F$ est donc bien définie.
7. On procède par induction sur les formules. Pour ce qui est des formules atomiques, on peut tout d'abord constater que l'interprétation de l'égalité dans $\prod M_x/F$ vérifie bien que $(a_x)_{x \in X} = (b_x)_{x \in X}$ si et seulement si $(a_x)_{x \in X} = (b_x)_{x \in X}$, i.e. $\{x \in X \mid a_x = b_x\} \in F$, comme pour toutes les autres relations.

   Le cas des formules atomiques est alors exactement la définition de l'interprétation des relations dans $\prod M_x/F$. Il suffit alors de considérer le cas de $\cup, \neg, \exists$. Supposons que la propriété ait été démontrée pour $\varphi_1[y_1, \dots, y_n]$ et $\varphi_2[y_1, \dots, y_n]$[1], et $a^1, \dots, a^n \in M$. On a alors $\mathcal{M} \vDash \varphi_1[a^1, \dots, a^n] \wedge \varphi_2[a^1, \dots, a^n]$ si et seulement si $\mathcal{M} \vDash \varphi_i[a^1, \dots, a^n]$ pour $i = 1, 2$, c'est à dire $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash \varphi_i[a^1_x, \dots, a^n_x]\} \in F$ pour $i = 1, 2$. Comme F est clos par intersection, cela implique en particulier que $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash \bigwedge_{i=1,2} \varphi_i[a^1_x, \dots, a^n_x]\} \in F$. De plus, comme F est clos par inclusion, si ce dernier ensemble est dans F, c'est aussi le cas de $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash \varphi_i[a^1_x, \dots, a^n_x]\}$. On a donc bien l'équivalence voulue.

   Considérons maintenant le cas de $\exists$. On a $\mathcal{M} \vDash \exists y \varphi[a^1, \dots, a^n, y]$ si et seulement s'il existe $a \in M$ tel que $\mathcal{M} \vDash \varphi[a^1, \dots, a^n, a]$. Par induction cette dernière condition est équivalente à $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash \varphi[a^1_x, \dots, a^n_x, a_x]\} \in F$. Comme $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash \exists y \varphi[a^1_x, \dots, a^n_x, y]\}$ contient ce dernier ensemble, il est bien dans F. Réciproquement, si $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash \exists y \varphi[a^1_x, \dots, a^n_x, y]\} \in F$, soit a_x tel que $\mathcal{M}_x \vDash \exists y \varphi[a^1_x, \dots, a^n_x, a_x]$ pour les x dans cet ensemble et a_x quelconque en dehors de cette ensemble, alors un tel a vérifie bien la propriété voulue.

   Enfin, $\mathcal{M} \vDash \neg\varphi[a^1, \dots, a^n]$ si et seulement si $\mathcal{M} \nvDash \varphi[a^1, \dots, a^n]$, i.e. $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash \varphi[a^1_x, \dots, a^n_x]\} \notin F$. Comme F est un ultrafiltre, son complémentaire $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash \neg\varphi[a^1_x, \dots, a^n_x]\}$ est dans F. Ce qui conclut la preuve.
8. Soit T un théorie finiment consistante et soit X l'ensemble des parties finies de T. Pour tout partie finie $T_0 \subseteq T$, on choisit $M_{T_0} \vDash T_0$. Pour tout T_0, on note aussi $\langle T_0 \rangle = \{x \in X \mid T_0 \subset x\}$. L'ensemble des $\langle T_0 \rangle$ forme une base de filtre car $\langle T_0 \rangle \cap \langle T_1 \rangle = \langle T_0 \cup T_1 \rangle$ et aucun $\langle T_0 \rangle$ n'est vide vu qu'il contient au moins T_0. Soit F un ultrafiltre contenant cette base de filtre.

   On pose $\mathcal{M} = \prod \mathcal{M}_x / F$. Par la question précédente, pour tout énoncé φ de T, on a $\mathcal{M} \vDash \varphi$ si et seulement si $\{x \in X \mid \mathcal{M}_x \vDash \varphi\} \in F$, mais ce dernier ensemble contient $\langle \varphi \rangle \in F$ et on a donc bien $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

1. Les plus dubitatifs d'entre vous se demanderons peut être comme je peux supposer que les deux formules sont en le même variables mais il se convaincront aisément que si la formule $\varphi[y_1, \dots, y_n]$ vérifie la propriété voulue, c'est aussi de le cas si on la considère comme une formule en les variables $y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_k$