Silvain Rideau
Bureau T7
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 6

4 novembre 2012

Les exercices précédés d'une ✠ sont là pour vous aider à comprendre le cours et devront être fait avant le TD pour être corrigé au début du TD. Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

(✠) **Exercice 1 :**
Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{O}$, est-il vrai que :

1. Si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \preceq \mathcal{O}$, alors $\mathcal{M} \preceq \mathcal{O}$.
2. Si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{O}$ et $\mathcal{N} \preceq \mathcal{O}$, alors $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$.
3. Si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{O}$ et $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, alors $\mathcal{N} \preceq \mathcal{O}$.

Exercice 2 (Critère de Vaught) **:**
Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$ qui n'admet que des modèles infinis et soit κ un cardinal infini $\geq |\mathcal{L}|$. On dit que T est κ-catégorique si elle admet un unique modèle de taille κ, à isomorphisme près.
Montrer que si T est κ-catégorique, alors elle est complète.

Exercice 3 (Équivalence élémentaire et plongement commun) **:**
Soient $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ et $\mathcal{O}$ des $\mathcal{L}$-structures. On appelera plongement élémentaire un morphisme de structure $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ tel que $\mathrm{Im}(f) \preceq \mathcal{N}$.

1. Montrer que si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ se plongent élémentairement dans $\mathcal{O}$ alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.
2. Supposons $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, montrer que la $\mathcal{L}_{M \sqcup N}$-théorie $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \cup \mathcal{D}(\mathcal{N})$ est consistante (où $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ est le diagramme élémentaire de $\mathcal{M}$).
3. En déduire que si $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ si et seulement s'il existe $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ se plongent élémentairement dans $\mathcal{O}$.

Exercice 4 (La préservation contre-attaque) **:**
Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$. On note $T_\forall$ la théorie universelle de T, c'est-à-dire l'ensemble des formules $\varphi = (\forall x_1, .., x_n)\varphi_0(x_1, .., x_n)$ où φ_0 est sans quantificateurs, qui sont conséquence de T.

1. (Rappel du Td précédent) Soient T et T′ des théories sur un même langage $\mathcal{L}$. Montrer l'équivalence entre :
   - $T'_\forall \subseteq T_\forall$
   - Tout modèle de T se plonge dans un modèle de T′.
2. Prenons $\mathcal{L} = \{<\}$ et soient T, T′ deux $\mathcal{L}$-théories contenant la théorie des ordres stricts infinis. Montrer que $T_\forall = T'_\forall$.
3. Soit T = CAC (théorie des corps algébriquement clos), décrire $T_\forall$.

Exercice 5 (Espace vectoriels) **:**
Soit K un corps. On considère le langage $\mathcal{L} = \{0, +\} \cup \{\lambda_x \mid x \in K\}$, où 0 est un symbole de constante, + un symbole de fonction binaire et λ_x un symbole de fonction unaire pour tout $x \in K$.
Un K-espace vectoriel est naturellement une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{V}$ (+ est interprété comme l'addition, 0 comme le vecteur nul et λ_x comme la mutiplication scalaire par x).

1. Montrer que l'on peut axiomatiser la classe des K-espaces vectoriels infinis dans $\mathcal{L}$. Soit T la théorie ainsi obtenue.
2. Soit $\mathcal{V} \models T$. Décrire les sous-structures de $\mathcal{V}$.
3. Montrer que T est κ-catégorique pour tout κ infini avec $\kappa > |K|$. En déduire que T est complète.
4. Donner une axiomatisation de $\mathrm{Th}(\mathcal{Q})$ où $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}; 0, + \rangle$.

5. Montrer que si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ sont deux K-espaces vectoriels infinis et que $\mathcal{N}$ est de dimension infinie alors $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$.
6. Montrer que c'est aussi le cas si on retire l'hypothèse de dimension infinie (mais qu'ils sont toujours infinis).

Exercice 6 (Types et nombres de modèles dénombrables) **:**

1. Soit T une théorie dans un langage dénombrable, un type $p[x_1, \dots, x_n]$ est un ensemble de formules en les variables $x_1, \dots, x_n$ qui soit consistant avec T, i.e. il existe un modèle $\mathcal{M}$ de T et des points $c_1, \dots, c_n \in M$ tels que $\mathcal{M} \vDash \varphi[c_1, \dots, c_n]$ pour tout $\varphi \in p$ (on dit alors que p est réalisé dans $\mathcal{M}$).

   Montrer qu'un ensemble de formules $p[x_1, \dots, x_n]$ est un type de T si et seulement s'il est finiment consistant avec T (i.e. tout sous-ensemble fini de p est consistant avec T).
2. Soit $M \vDash T$, $A \subseteq M$ et $p[x_1, \dots, x_n]$ un type de T, montrer que p est réalisé dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ qui est de même cardinal que M.
3. Un type $p[x_1, \dots, x_n]$ est dit isolé s'il existe une formule $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ telle que $T \vdash \varphi \to \psi$ pour tout $\psi \in p$. Montrer qu'un type isolé est réalisé dans tout modèle de T.
4. Si $\mathcal{M} \vDash T$ et $c_1, \dots, c_n \in M$, on note $tp(c_1, \dots, c_n) = \{\varphi[x_1, \dots, x_n] \mid \mathcal{M} \vDash \varphi[c_1, \dots, c_n]\}$.

   Montrer que $tp(c_1, \dots, c_n)$ est un type de $Th(\mathcal{M})$.
5. On dit que $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un isomorphisme partiel élémentaire si pour tout $c_1, \dots, c_n \in M$, $tp(c_1, \dots, c_n) = tp(f(c_1), \dots, f(c_n))$.

   Soit $c_1, \dots, c_n \in M$ et $b_1, \dots, b_n \in N$ tels que $tp(c_1, \dots, c_n) = tp(b_1, \dots, b_n)$, montrer qu'il existe un isomorphisme partiel $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ tel que $f(c_i) = b_i$.
6. On dit que $\mathcal{M}$ est atomique si pour tout $c_1, \dots, c_n \in M$, $tp(c_1, \dots, c_n)$ est isolé.

   Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ atomiques et dénombrables, montrer que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$

   (Indication : on pourra construire une chaîne croissante d'isomorphismes partiels de domaine fini telle que l'union soit l'isomorphisme recherché.)
7. On admettra le résultat suivant : soit $p[x_1, \dots, x_n]$ un type non isolé de T, il existe $\mathcal{M} \vDash T$ dénombrable tel que p n'est pas réalisé dans $\mathcal{M}$.

   En déduire que T est $\aleph_0$-catégorique si et seulement si tous les types de T sont isolés.
8. Montrer que si T n'est pas $\aleph_0$-catégorique alors pour tout $\mathcal{M} \vDash T$ et tout $c_1, \dots, c_n \in M$, $\Delta(c_1, \dots, c_n)$ n'est pas $\aleph_0$-catégorique (où $\Delta(c_1, \dots, c_n)$ est le diagramme atomique).
9. Supposons que T n'est pas $\aleph_0$-catégorique, montrer que T a au moins 3 modèles dénombrables.

   (Indication : utiliser tout ce qu'on a démontré jusque là.)

On verra certainement au prochain Td que ce minimum est effectif.