Silvain Rideau
Bureau T7

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 6

5 novembre 2012

Exercice 5 (Espaces Vectoriels) **:**

1. La classe des K espaces vectoriels infinis est axiomatisée par les axiomes suivants :
   a) $\forall x \forall y \forall z\, (x+y)+z = x+(y+z) \wedge x+y = y+x \wedge x+0 = x$,
   b) $\forall x \forall y\, \lambda_k(x+y) = \lambda_k(x)+\lambda_k(y) \wedge \lambda_k(\lambda_{k'}(x)) = \lambda_{kk'}(x) \wedge \lambda_k(x)+\lambda_{k'}(x) = \lambda_{k+k'}(x)$, pour tout k et $k' \in K$,
   c) $\forall x \lambda_1 x = x$,
   d) $\exists x_1 \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$.
2. Les sous structure de $\mathcal{V}$ sont exactement les sous-espaces vectoriels, ils doivent être clos par somme et par tous les λ_k.
3. Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension (où la dimension est le cardinal potentiellement infini d'une base). Si $\mathcal{U}$ est un k-espace vectoriel de cardinal $\kappa > |k|$, si λ est sa dimension, alors est isomorphe à $K^{(\lambda)}$, les familles presque toujours nulles d'éléments de K indexées par λ dont le cardinal est $\lambda|K|$ qui doit être égal à $\kappa > |K|$. Il s'en suit immédiatement que comme κ est infini, on a $\lambda = \kappa$.

   Ainsi deux modèles de T de cardinal $\kappa > |K|$ ont même dimension et sont donc isomorphes. Comme T n'a que des modèles infinis, d'après le critère de Vaught (voir exercice 2), T est complète.
4. Soit T la théorie suivante :
   a) les axiomes de groupes abéliens,
   b) $\exists x, x \neq 0$,
   c) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'axiome $(\forall x \exists y) y + \cdots + y = x$, où y apparaît n fois.

   Il est clair que $T \subset \mathrm{Th}(\mathcal{Q})$. Pour conclure que cette théorie axiomatise $\mathrm{Th}(\mathcal{Q})$, il suffit de montrer que T est une théorie complète. Pour cela, on remarque que les groupes abéliens divisibles sont exactement les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels (si V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, c'est a fortiori un groupe abélien divisible, et réciproquement un groupe abélien divisible admet une unique structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel). Ainsi, si φ est un énoncé dans le langage $\{0, +\}$, alors φ est conséquence de T si et seulement s'il est conséquence de la théorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels non nuls. Comme cette dernière est complète par les résultats précédents, on en déduit que T est complète.
5. Par le théorème de Lowenheim-Skolem ascendant, il existe $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}'$ tel que $\mathcal{U}'$ a le même cardinal que $\mathcal{U}$ (et donc la même dimension). Comme cette dimension est strictement plus grande (et infinie) que celle de $\mathcal{V}$, il s'en suit que les supplémentaires de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont de même dimension et sont donc isomorphes. Ainsi il existe un isomorphisme de $\mathcal{U}'$ dans $\mathcal{U}$ qui fixe $\mathcal{V}$. Comme $\mathcal{U}' \models \mathcal{D}(\mathcal{V})$, il s'en suit que $\mathcal{U}$ aussi et donc qu'on a bien $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$.
6. Par Lowenheim-Skolem ascendant, on peut trouver $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{U}'$ avec $\mathcal{U}'$ de cardinal assez grand pour que les hypothèse de la question précédente sur la dimension soient vérifiées. On a alors $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}'$ et donc par l'exercice 1, $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$.

Exercice 6 (Types et nombres de modèles dénombrables) **:**

1. Soient $c_1, \ldots, c_n$ de nouvelles constantes et considérons T_p la théorie $T \cup p[\bar{c}]$. L'ensemble de formules p est un type si et seulement si T_p est consistante, et donc par compacité, si et seulement si toute partie fini de T_p est consistant. Mais toute partie fini de T_p est inclu dans T_{p_0} avec $p_0 \subseteq p$ fini, i.e. T_p est finiment consistante si et seulement si toute partie finie de p est consistante avec T.

2. Soit $p_0 \subseteq p$ fini et posons $\varphi_{p_0} = \bigwedge_{\varphi \in p_0} \varphi$. Comme T est complète elle a pour conséquence soit $\exists \overline{x}\ \varphi_{p_0}[\overline{x}]$ soit $\forall \overline{x}\ \neg\varphi_{p_0}[\overline{x}]$, mais ce dernier cas contredit le fait que T_{p_0} soit consistante.

   Montrons maintenant que $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \cup p[\overline{c}]$ est consistante. En effet une partie finie de cette théorie est de la forme $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \cup p_0[\overline{c}]$ pour p_0 fini. Mais comme $\exists \overline{x} \varphi_{p_0}[\overline{x}]$ une conséquence de T est donc est vraie dans $\mathcal{M}$, on peut trouver des interprétation pour les c_i dans $\mathcal{M}$ telle que la nouvelle structure soit un modèle de $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \cup p_0[\overline{c}]$. Par compacité cette théorie est consistante et par Lowenheim-Skolem, on peut en trouver un modèle de même cardinal que $\mathcal{M}$.

3. Comme φ est consistante avec T et que T et complète, comme on l'a vu, φ est réalisée dans tout modèle de T. Soit alors $\mathcal{M} \models T$ et $\overline{a}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}]$. Comme $T \models \forall \overline{x} \varphi[\overline{x}] \to \psi[\overline{x}]$, pour tout $\psi \in p$, on a bien $\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}]]$ pour tout $\psi \in p$, i.e. $\overline{a}$ réalise p.

   Le deuxième cas est similaire. On pose c tel que $\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}, c]$ et on conclut de la même manière.

4. L'ensemble de formules $tp(\overline{c})$ est bien évidemment consistant avec T vu qu'il est réalisé dans $\mathcal{M}$.

5. On pose $M = \{m_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $n = \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et on construit par récurence une famille cohérente de f_i de domaine $\overline{c}$ fini tel que $tp(\overline{c}) = tp(f_i(\overline{c}))$ et tels le domaine de f_{2i} contient m_i et l'image de f_{2i+1} contient n_i. On pose f_{-1} de domaine vide.

   Soit $\overline{c}$ le domaine de f_{2i-1}. Si $m_i \in \overline{c}$ il n'y a rien à faire. Sinon, soit φ qui isole $tp(\overline{c}m_i)$, comme $\exists y \varphi[\overline{x}, y] \in tp(\overline{c})$, on a aussi $\mathbb{N} \models \exists y \varphi[f_{2i-1}(\overline{c}), y]$. Par la question 3, il existe $b \in N$ tel que $tp(\overline{c}m_i) = tp(f_{2i-1}(\overline{c})b)$ (dans le cas $i = 0$ on applique simplement la première partie de la question). On pose alors $f_{2i}(c_j) = f_{2i-1}(c_j)$ et $f_{2i}(m_i) = b$. La construction de f_{2i+1} est symétrique.

   Il suffit alors de considérer $f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i$.

6. Supposons que T ait un type p non isolé. Par le résultat admis il existe $\mathcal{M} \models T$ dénombrable tel que p ne soit pas réalisé dans $\mathcal{M}$. Soit alors $\mathcal{N}$ une extension élémentaire dénombrable dans laquelle p est réalisée (qui existe par la question 2). Il est alors impossible que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ soit isomorphes car une réalisation de p dans $\mathcal{N}$ serait envoyée sur une réalisation de p dans $\mathcal{M}$.

   La question précédente nous donne exactement la réciproque.

7. Soit p un type de T. Soit $\overline{b} \in \mathcal{N} \models T$ qui réalise p. Comme T est complète, par l'exercice 3, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ se plongent tous deux élémentairement dans $\mathcal{O}$. Comme le plongement est élémentaire, l'image d'une réalisation de p dans $\mathcal{N}$ est une réalisation de p dans $\mathcal{O} \models \mathcal{D}(\overline{c})$. Il s'en suit donc que p est aussi un type de $\mathcal{D}(\overline{c})$.

   Si p est isolé dans $\mathcal{D}(\overline{c})$, il existe $\varphi[\overline{c}, \overline{y}]$ tel que pour tout $\theta \in p$, $\mathcal{D}(\overline{c}) \vdash \forall \overline{y}\ \varphi[\overline{c}, \overline{y}] \to \theta[\overline{y}]$. Par compacité il existe $\psi[\overline{c}]$ telle que $T \vdash \forall \overline{y}(\varphi[\overline{c}, \overline{y}] \wedge \psi[\overline{c}]) \to \theta[\overline{y}]$ et donc $T \vdash \forall \overline{x} \forall \overline{y}(\varphi[\overline{x}, \overline{y}] \wedge \psi[\overline{x}]) \to \theta[\overline{y}]$ d'où $T \vdash \forall \overline{y}(\exists \overline{x} \varphi[\overline{x}, \overline{y}] \wedge \psi[\overline{x}]) \to \theta[\overline{y}]$, ce qui implique que p est isolé dans T.

   Par la question précédente, on a donc montré que si $\mathcal{D}(\overline{c})$ est $\aleph_0$-catégorique, T l'est aussi.

8. Soit T qui n'est pas $\aleph_0$-catégorique. Il existe donc une type non isolé p et des modèles dénombrables $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de T tels que dans $\mathcal{M}$ p ne soit pas réalisé mais il est réalisé dans $\mathcal{N}$. Soit $\overline{c}$ une réalisation de p dans $\mathcal{N}$. Quitte à grossir p, on peut supposer $p = tp(\overline{c})$ (il ne sera toujours pas réalisé dans $\mathcal{M}$).

   Par la question précédente, $\mathcal{D}(\overline{c})$ n'est pas $\aleph_0$-catégorique non plus. Il existe donc un type $q[\overline{c}, \overline{y}]$ de $\mathcal{D}(\overline{c})$ qui soit non isolé dans $\mathcal{D}(\overline{c})$. Quitte à changer $\mathcal{N}$ on peut supposer que $q[\overline{c}, \overline{y}]$ n'est pas réalisé dans $\mathcal{N}$. Soit alors $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{O}$ tel que pour tout $\overline{c}' \in N$ qui réalise p, $q[\overline{c'}, \overline{y}]$ est réalisé dans $\mathcal{O}$ (un tel $\mathcal{O}$ existe par compacité car pour toute partie finie $\{\psi_i\}$ de q, $\exists \overline{y}\ \bigwedge_i \psi_i[\overline{c}, \overline{y}]$ is in $\mathcal{D}(\overline{c})$ et donc $\exists \overline{y}\ \bigwedge_i \psi_i[\overline{c}, \overline{y}] \in p[\overline{x}]$). De plus, on peut prendre $\mathcal{O}$ dénombrable car, comme N est dénombrable, il y a donc au plus un nombre dénombrable de tels $\overline{c}'$). Quitte à itérer et à prendre l'union de la chaîne ainsi construite, on peut supposer que $\mathcal{O}$ vérifie que pour tout $\overline{c}' \in O$ qui réalise p, $q[\overline{c'}, \overline{y}]$ est réalisé dans $\mathcal{O}$.

   Comme p est réalisé dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{O}$ et n'est pas réalisé dans $\mathcal{M}$, il est évident que $\mathcal{M} \not\cong \mathcal{N}$ et $\mathcal{M} \not\cong \mathcal{O}$. Enfin si f est un isomorphisme entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{O}$, $f(\overline{c})$ est une réalisation de p dans $\mathcal{O}$ et donc il existe $\overline{b}$ qui réalise $q[f(\overline{c}), \overline{y}]$, mais alors $f^{-1}(\overline{b})$ réalise $q[\overline{c}, \overline{y}]$ dans $\mathcal{N}$, ce qui est absurde.