Silvain Rideau
Bureau T7
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

# TD de Logique 7 (Élimination des quantificateurs)

12 novembre 2012

Les exercices précédés d'une ✠ sont là pour vous aider à comprendre le cours et devront être fait avant le TD pour être corrigé au début du TD. Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

(✠) **Exercice 1** (Relation d'équivalence) :
On travaille dans le langage $\mathcal{L} = \{E\}$ où $E$ est une relation binaire. On considère la théorie $T$ qui dit que $E$ est une relation d'équivalence, qu'il y a une infinité de classes d'équivalence, et que toutes ces classes sont infinies.

1. Vérifier que $T$ est bien définie (i.e., les propriétés indiquées sont exprimables au premier ordre).
2. Montrer que deux modèles dénombrables de $T$ sont isomorphes. En déduire que $T$ est complète.
3. Montrer que $T$ admet l'élimination des quantificateurs.
4. Combien $T$ admet-elle de modèles de cardinalité $\aleph_1$ (à isomorphisme près) ?

**Exercice 2** (Ordres linéaires denses) :
Soit $T$ la théorie des ordres totaux denses sans extrémité, i.e. sans plus petit élément ni plus grand élément dans le langage $\mathcal{L} = \{<\}$.

1. Montrer que $T$ élimine les quantificateurs.
2. Montrer que $T$ est $\aleph_0$-catégorique.
3. Montrer que $T$ est complète.
4. Montrer que $(\mathbb{Q}, <) \preccurlyeq (\mathbb{R}, <)$.
5. Soit $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $T_1 = T \cup \{c_i < c_j \mid i < j\}$. Montrer que $T_1$ élimine les quantificateurs, est complète et a exactement trois modèles dénombrables.
6. Soit $T'$ la théorie des ordres totaux denses avec un plus grand élément, élimine-t-elle les quantificateurs ? Si ce n'est pas le cas, pouvez-vous trouver un langage dans lequel on aura élimination des quantificateurs. Même question pour les ordre linéraires denses avec plus petit élément et ceux avec plus petit et plus grand élément.

**Exercice 3** (Encore des relations d'équivalence) :
Soit $\mathcal{L}_n = \{E_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ où les $E_i$ sont des prédicats binaires. On considère la théorie $T_n$ qui exprime que :

- Chaque $E_i$ est une relation d'équivalence,
- $E_0$ a deux classes d'équivalence,
- Chaque $E_i$-classe d'équivalence est la réunion de deux $E_{i+1}$-classe.
- Chaque classe de $E_n$ est infinie.

1. Écrire une axiomatisation de $T_n$.
2. Pour quels cardinaux infinis $T_n$ est-elle catégorique ?
3. Montrer que $T_n$ élimine les quantificateurs et est complète.
4. Soit $\mathcal{L} = \bigcup \mathcal{L}_n$ et $T_n = \bigcup T_n$, montrer que $T$ est consistante, élimine les quantificateurs, est complète.
5. Combien de modèles dénombrables a $T$, à isomorphisme près ?

**Exercice 4** ($\lambda$-modèles, pour changer un peu des quantificateurs) :
Soit $T$ une théorie. On appelle $\lambda$-modèle de $T$ un modèle $\mathcal{M}$ de $T$ de cardinal $\lambda$ tel que pour toute formule $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$, $\{c_1, \ldots, c_n \in M \mid \mathcal{M} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n]\}$ est de cardinal $\lambda$ ou fini.

1. Montrer que toute théorie T qui admet des modèles infinis a des $\lambda$-modèles pour tout $\lambda \geq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$. En particulier, montrer que si $\mathcal{M}$ est de cardinal $\lambda \geq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$, il existe une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ qui soit un $\lambda$-modèle.
2. Supposons que tous les $\lambda$-modèles de T soient isomorphes et que T n'ait que des modèles infinis, montrer que T est complète.
3. Supposons que T est $\lambda$-catégorique, montrer que tout modèle de T de cardinal $\lambda$ est un $\lambda$-modèle.

**Exercice 5** (Groupes ordonnés divisibles) **:**
Soit $\mathcal{L} = \{0, +, -, <\}$ où $-$ est une fonction unaire. Un groupe ordonné est un groupe muni d'un ordre total tel que pour tout $x, y, z$, $x < y$ implique $x + z < y + z$. Un groupe G est dit divisible s'il est abélien et que pour tout $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y$ tel que $y^n = x$.

1. Montrer qu'on peut axiomatiser la théorie des groupes abéliens divisibles ordonnés non nuls dans le langage $\mathcal{L}$, on la notera T.
2. Montrer que si G est un groupe ordonné, il est sans torsion, i.e. $nx = \sum_{i=1}^{n} x = 0$ implique $n = 0$ ou $x = 0$.
3. Montrer qu'un groupe divisible sans torsion peut être muni d'une unique structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour la même addition.
4. Soit $A \subset G$ où G est un groupe divisible. On appelle clôture divisible de $A$, notée $\mathrm{Div}(A)$, l'ensemble $\{y \in G \mid \exists n \in \mathbb{N},\ y^n \in A\}$. Montrer que $\mathrm{Div}(A)$ est un groupe divisible.
5. Soit $f : A \to G$ un $\mathcal{L}$-plongement, montrer que f s'étend uniquement à $\mathrm{Div}(A)$ en temps qu'isomorphisme de groupe ordonné.
6. Montrer que l'ordre sur G est dense.
7. Montrer que T élimine les quantificateurs et que T est complète.
8. Montrer que tout ensemble définissable inclus dans G (en une seule variable donc) est une union de points et d'intervalles.
9. Soit $\varphi[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ un formule. On suppose que $\{x_1, \ldots x_n \mid G \vDash \varphi[x_1, \ldots, x_m, g_1, \ldots, g_n]\}$ est non vide, montrer qu'il existe $h_1, \ldots, h_m$ dans cet ensemble qui soit définissable sur $g_1, \ldots, g_n$ (i.e. le singleton $\{h_1, \ldots, h_m\} \subset G^m$ est défini par une formule à paramètres (exclusivement) parmi $g_1, \ldots, g_n$).
10. En déduire que pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ il existe une fonction définissable $f : G^n \to G^m$ telle que si $\{x_1, \ldots x_n \mid G \vDash \varphi[x_1, \ldots, x_m, g_1, \ldots, g_n]\}$ est non vide, alors $f(g_1, \ldots, g_n)$ appartient à cet ensemble.