Silvain Rideau
Bureau T7

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 7 (Élimination des quantificateurs)

12 novembre 2012

Exercice 3 (Encore des relations d'équivalence) **:**

3. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T_n, $A \subseteq M \cap N$ et $\varphi[x, \overline{a}]$ une $\mathcal{L}_n$-formule sans quantificateurs à paramètre dans A. On sait que φ est équivalente à une formule de la forme $\bigvee_k \varphi_k[x, \overline{a}]$ où φ_k est de la forme

$$\bigwedge_{j=1}^{l_1^k} xE_{i_{j,k,1}} a_{i_{j,k,1}} \bigwedge_{j=1}^{l_2^k} \neg xE_{i_{j,k,2}} a_{i_{j,k,2}} \bigwedge_{j=1}^{l_3^k} x = a_{i_{j,k,3}} \bigwedge_{j=1}^{l_4^k} x \neq a_{i_{j,k,4}} \wedge \psi_k[\overline{a}]$$

où ψ_k est sans quantificateurs. En effet, comme les E_i sont symmétriques, on peut toujours supposer que x est à gauche.

Supposons que $\mathcal{M} \vDash \exists x\ \varphi[x, \overline{a}]$. Il existe donc k et $m \in M$ tel que $\mathcal{M} \vDash \varphi_k[m, \overline{a}]$. Si $l_3^k \geq 1$, alors $m \in A$ et on a aussi $\mathcal{N} \vDash \varphi_k[m, \overline{a}]$ et donc $\mathcal{N} \vDash \varphi[m, \overline{a}]$.

Sinon $l_3^k = 0$. Soit alors i_0 minimal tel que m soit dans la même E_i-classe qu'un $a_{i'}$ (on note alors $a_{i'_0}$ ce point), en supposant qu'il existe. Supposons que $i_0 \neq n$. On a alors $xE_{i_0} a_{i'_0} \wedge \neg xE_{i_0+1} a_{i'_0}$ implique $\varphi_k[x, \overline{a}]$. En effet, par minimalité de i_0, tous les $a_{i'}$ tels que $a_{i'} E_{i_0} a_{i'_0}$ vérifient aussi $a_{i'} E_{i_0+1} a_{i'_0}$ et donc, sous l'hypothèse que $xE_{i_0} a_{i'_0} \wedge \neg xE_{i_0+1} a_{i'_0}$, $xE_i a_{i'}$ si et seulement si $i \geq i_0$ et $a_{i'} E_i a_{i_0}$.

Si $i_0 = n$, on vérifie que $xE_{i_0} a_{i'_0} \bigwedge_i x \neq a_i$ implique $\varphi_k[x, \overline{a}]$.

Il est alors facile de voir dans les deux cas qu'on trouve dans N un point qui vérifie $\varphi_k[x, \overline{a}]$.

Si i_0 n'existe pas, il s'en suit que tous les $a_{i'}$ sont dans la même E_0-classe et que m n'y est pas. On trouve alors facilement un $n \in N$ dans la E_0-classe qui ne contient aucun $a_{i'}$.

Pour ce qui est de la complétude, on peut procéder par critère de Vaught d'après la question précédente, ou voir que la structure singleton $\{m\}$ telle que $mE_i m$ pour tout m est une sous-structure de tout modèle de T.

4. Comme T est une union infinie croissante de théories consistantes, T est elle même consistante. En effet tout fragement fini de T est inclu dans T_n, pour un certain n, qui est consistante.

De même toute $\mathcal{L}$-formule φ est en fait une $\mathcal{L}_n$-formule (pour une certain n) et comme T_n élimine les quantificateurs, φ est équivalente à une $\mathcal{L}_n$-formule sans quantificateurs qui est donc aussi une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs.

Tout $\mathcal{L}$-énoncé est aussi un $\mathcal{L}_n$-énoncé (pour un certain n) et donc soit φ soit $\neg\varphi$ est conséquence de T_n et donc de T.

5. La théorie T a $2^{\aleph_0}$ modéles dénombrables. En effet, $\mathbb{N}$ muni des congruences modulo 2^n est un modèle $\mathcal{N}$ de T qui vérifie que chaque intersection de E_n-classes pour tout n est soit vide soit réduite à un point. Soit X une partie infinie de $\mathbb{N}$, $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un énumération croissante de X. On construit alors $\mathcal{N}_X$ à partir de $\mathcal{N}$ en remplaçant i par x_i points distincts. Les $\mathcal{N}_X$ sont deux à deux non-isomorphes. Il s'en suit donc que T a $2^{\aleph_0}$ modèles de cardinal $\aleph_0$.

Exercice 4 (λ-modèles, pour changer un peu des quantificateurs) **:**

1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle infinie de λ. Pour chaque formule φ telle que $\{\overline{c} \in M \mid \mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{c}]\}$ est infini, on pose C_φ un ensemble de nouveaux uplets de constantes de cardinal λ et on note $\mathcal{L}'$ le nouveau langage obtenu en rajoutant toutes ces constantes. Comme il y $|\mathcal{L}|$ $\mathcal{L}$-formules et que les uplets sont finis, le cardinal de $\mathcal{L}'$ est $|\mathcal{L}|\lambda = \lambda$. On note $T' \supseteq T \cup \{\varphi[\overline{c}_\varphi]\}$ la théorie qui dit que tous les uplets de constantes $\overline{c}_\varphi$ sont distincts.

Comme on a rajouté des constantes justement pour les ensembles définissables infinis, T' est finiment consistante et par Lowenheim-Skolem, elle a des modèles de cardinal λ. Soit $\mathcal{N}$ un de ces modèles.

Comme tous les ensembles définissables infinis de $\mathcal{N}$ sont de cardinal au moins λ mais que $|N| = \lambda$, ils sont en fait de cardinal exactement λ et $\mathcal{N}$ est bien un λ-modèle.

2. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T (nécessairement infinis). Par Lowenheim-Skolem descendant, il existe $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}_1 \preccurlyeq \mathcal{N}$ tel que $|M_1|$ et $|N_1|$ soit inférieurs à λ. En appliquant la question précédente à $\mathcal{D}(\mathcal{M}_1)$ et $\mathcal{D}(\mathcal{N}_1)$ respectivement, on trouve deux λ-modèles $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{N}_2$ tels que $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{N}_1 \preccurlyeq \mathcal{N}_2$. On a alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2 \simeq \mathcal{N}_2 \equiv \mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N}$.
3. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de cardinal λ de T. Comme à la question précédente, on peut trouver $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ qui soit un λ-modèle. Mais comme T est λ-catégorique, il s'en suit que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ est déjà un λ-modèle.

Exercice 5 (Groupes ordonnés divisibles) **:**