Silvain Rideau
Bureau T7

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

TD de Logique 8 (Fonctions primitives récursives)

19 novembre 2012

Les exercices précédés d'une ✠ sont là pour vous aider à comprendre le cours et devront être fait avant le TD pour être corrigé au début du TD. Les exercices qui ne sont pas abordés en cours, seront (certainement) corrigés sur ma page personelle (voir ci-dessus).

(✠) **Exercice 1** (Fonctions primitives récursives) **:**

1. Montrer que la fonction $\mathtt{pgcd}$ est primitive récursive.
2. Montrer que la fonction $\mathtt{fib}$ vérifiant les égalités suivantes est primitive récursive :

$$\mathtt{fib}(0) = 1\ ;\ \mathtt{fib}(1) = 1\ ;\ \mathtt{fib}(n+2) = \mathtt{fib}(n+1) + \mathtt{fib}(n)$$

3. Soit $f \in \mathcal{F}_p$. Montrer que f est primitive récursive si et seulement si le graphe de f est un sous-ensemble primitif récursif de $\mathbb{N}^{p+1}$ et f est majorée par une fonction primitive récursive $g \in \mathcal{F}_p$.

Exercice 2 (Schémas de récurrence) **:**

1. Soient f et $g \in \mathcal{F}_{p+1}$ définis par récurrence mutuelle :

$$\begin{array}{rcl} f(\overline{x},0) & = & h(\overline{x}) \\ g(\overline{x},0) & = & i(\overline{x}) \\ f(\overline{x},y+1) & = & j(\overline{x},y,f(\overline{x},y),g(\overline{x},y)) \\ g(\overline{x},y+1) & = & k(\overline{x},y,f(\overline{x},y),g(\overline{x},y)) \end{array}$$

   Supposons que h, i, j et k soient primitives récursives, montrer que f et g le sont.
2. Soit $f \in \mathcal{F}_{p+1}$ définie par la récurence suivante :

$$\begin{array}{rcl} f(\overline{x},0) & = & g(\overline{x}) \\ f(\overline{x},y) & = & h(\overline{x},y,f(\overline{x},i(\overline{x},y))) \end{array}$$

   où g, h et i sont primitives récursives et $i(\overline{x},y) < y$ pour tout $y > 0$. Montrer que f est primitive récursive.

Exercice 3 (Fonctions élémentaires de Kalmar) **:**
L'ensemble des *fonctions élémentaires* est le plus petit ensemble de fonctions entières (c'est-à-dire de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ pour un certain $p \geq 1$) vérifiant les propriétés suivantes :

- les projections P_i^p de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires
- l'addition, la multiplication et la fonction caractéristique de l'égalité de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires
- si g de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ et f_1, …, f_k de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires alors $g \circ (f_1, \ldots, f_k)$ aussi
- si f de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ est élémentaire alors la somme bornée et le produit borné :

$$(x_1,\ldots,x_p,x) \mapsto \sum_{i=0}^{x} f(x_1,\ldots,x_p,i) \qquad\qquad (x_1,\ldots,x_p,x) \mapsto \prod_{i=0}^{x} f(x_1,\ldots,x_p,i)$$

de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$ sont élémentaires.

1. Montrer que, pour tout k, la fonction constante égale à k de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est élémentaire.
2. Montrer que la fonction exponentielle exp de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\exp(m,n) = m^n$ est élémentaire.
3. On définit la fonction T de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ par $T(m,0) = m$ et $T(m,n+1) = \exp(2,T(m,n))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la fonction $m \mapsto T(m,n)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que T est primitive récursive.

b) Montrer que $(m, n) \mapsto T(m, n)$ est strictement croissante en n à m fixé et strictement croissante en m à n fixé.

c) On dit qu'une fonction f de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est *dominée* par la fonction φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ si, pour tout $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$, $f(n_1, \dots, n_p) \leq \varphi(\max(n_1, \dots, n_p))$.
Montrer que, pour toute fonction élémentaire f, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que f est dominée par T_n.

d) Montrer que T n'est pas élémentaire.

Exercice 4 (Fonction d'Ackermann) **:**
On rappelle que la fonction d'Ackermann ξ est définie par $\xi(0, x) = 2^x$, $\xi(y, 0) = 1$ et $\xi(y+1, x+1) = \xi(y, \xi(y+1, x))$. On pose $h(y, t) = \mu x < t\ \xi(y, x) = t$.

1. $h(y, t) = x$ si et seulement si $\xi(y, x) = t$ ou $t \notin \mathrm{Im}(\lambda z \xi(y, z))$ et $x = 0$.
2. On pose $g(y, t) = \mu x < t\ \exists u < t\ h(y, t) = u \wedge h(y+1, u) = x$. Montrer que $h(y+1, t) = 1 + g(y, t)$ si $g(y, t) > 0$, $h(y+1, t) = 1$ si $g(y, t) = 0$ et $t = 2$ et sinon $h(y+1, t) = 0$.
3. En déduire que h est primitive récursive.
4. En déduire que le graphe de ξ est primitif récursif et que ξ est récursive.
5. On note $s(t) = \mu x < t h(x, t) = x$ et on définit la fonction r par $r(t) = 2s(t) + 1$ si $t \in \mathrm{Im}(\lambda x\ \xi(x, x))$ et $r(t) = 2\sum_{k=2}^{t} \mathbb{1}_{s(k)=0}$ sinon. Montrer que r est primitive récursive, que c'est une bijection et que son inverse n'est pas primitive récursive.
6. Montrer que, par contre, la réciproque d'une bijection récursive est récursive.