Silvain Rideau
Bureau T7
silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 8 (Fonctions primitives récursives)

19 novembre 2012

Exercice 4 (Fonction d'Ackermann) **:**

1. Si $t \in \mathrm{Im}(\lambda z \xi(y,z))$, alors si $t = \xi(n, x_0) > x_0$, et donc le schéma μ borné rend bien ce x_0, i.e. $h(y,t) = x_0$. Sinon il n'existe pas de x_0 tel que $t = \xi(n, x_0)$ (encore moins de $x_0 < t$ et donc le schéma μ borné rend 0, i.e. $h(y,t) = 0$.
2. Si $g(y,t) > 0$, il existe $x = g(y,t) > 0$ et u tels que que $h(y,t) = u$ et $h(y+1,u) = x$, i.e. $\xi(y+1,x) = u > x > 0$ et donc $t = \xi(y,u) = \xi(y, \xi(y+1,x)) = \xi(y+1, x+1)$ et donc $h(y+1,t) = 1 + x = 1 + g(y,t)$.

   Si $g(y,t) = 0$, soit $t \in \mathrm{Im}(\lambda z \xi(y+1,z))$. Alots soit $t = \xi(y+1,0)$ et donc $h(y+1,t) = 0$, soit $t = \xi(y, \xi(y+1,x))$ pour un certain x et donc le schéma μ est réalisé par un point nécessairement plus petit que t et doit donc être réalisé pour 0 (sinon $g(y,t) > 0$), i.e. $t = \xi(y+1,1) = \xi(y, \xi(y+1,0)) = \xi(y,1) = \xi(0,1) = 2$.

   Enfin, si $t \notin \mathrm{Im}(\lambda z \xi(y+1,z))$, on a bien $h(y+1,t) = 0$.
3. Commençons par voir que $h(0,t)$, qui est égale à x si $t = 2^x$ et à 0 sinon, est bien primitive récursive et que $h(1,t)$, qui est égale à x si t est une tour de puissances de 2 de hauteur x et 0 sinon, est aussi primitive récursive.

   Posons maintenant $h'(y,t) = \langle \alpha_2(h(y,0), h(y+1,0)), \ldots, \alpha_2(h(y,t), h(y+1,t)) \rangle$. On a alors $h'(0,t) = \langle \alpha_2(h(0,0), h(y+1,0)) \ldots, \alpha_2(h(0,t), h(1,t)) \rangle$, qui est bien primitive récursive (il faut faire une récurence primitive sur t pour définir cette fonction). De même, en utilisant la relation de récurence sur h donnée à la question précédente (et en faisant une autre récurence primitive sur t), on montre que $h'(y+1,t)$ est une fonction récursive primitive des $h(y+1,u)$ et des $h(y,u)$ pour $u \leq t$ (ainsi bien sur que de t et y) et donc de $h'(y,t)$.
4. On a (y,x,t) dans le graphe de ξ si et seulement si $x = h(t,y)$ et si $x = 0$ alors $t = 1$. Comme on vient de montrer que h est primitive récursive on a le résultat voulu. Maintenant comme $\xi(y,x) = \mathbb{1}_{x=0} + \mathbb{1}_{x \neq 0} \mu t[h(y,t) = x]$, elle est bien récursive.
5. Comme h est primitive récursive, s l'est aussi et donc r l'est aussi (elle est définie à partir du graphe de ξ et de s avec une disjonction de cas et une somme bornée). De plus elle est injective, en effet si $r(t_1) = r(t_2)$ est impaire alors on doit avoir $s(t_1) = s(t_2)$ et donc si $s(t_1) = s(t_2) > 0$, $t_i = \xi(s(t_i), s(t_1))$. Si $s(t_1) = s(t_2) = 0$ mais t_1 est dans l'image de $\lambda x\ \xi(x,x)$ alors $t_1 = t_2 = 1$. Si $r(t_1) = r(t_2)$ est pair alors $\sum_{k=2}^{t_1} \mathbb{1}_{s(k)=0} = \sum_{k=2}^{t_2} \mathbb{1}_{s(k)=0}$ et comme $s(t_i) = 0$ (sinon on serait dans le cas précédent) si $t_1 > t_2$ alors $\sum_{k=2}^{t_1} \mathbb{1}_{s(k)=0} > \sum_{k=2}^{t_2} \mathbb{1}_{s(k)=0}$.

   Pour ce qui est de la surjectivité, sur les impairs c'est du au fait que $\xi(x,x)$ est une fonction totale et sur les pairs c'est du au fait qu'on compte les point qui n'étaient pas dans l'image sauf 0 qui sont plus petits que t.

   Si l'inverse de r était primitive récursive, comme $r^{-1}(2x+1) = s^{-1}(x) = \xi(x,x)$, cette dernière fonction serait primitive récursive, c'est absurde.
6. Soit f bijective récursive. La réciproque de f est donnée par $f^{-1}(y) = \mu x[f(x) = y]$.