Silvain Rideau
Bureau T7

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 9 (Fonctions récursives)

26 novembre 2012

Exercice 3 (Existence de racines) **:**

1. Remarquons tout d'abord que si $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$, on a en particulier $a_0 = x(\sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1})$ et donc x divise a_0, en particulier $|x| \leq a_0$, de plus une racine d'un tel polynôme est forcément négative. L'ensemble que l'on cherche est donc :
$$\exists x \leq a_0\ a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2\lfloor n/2 \rfloor} x^{2\lfloor n/2 \rfloor} = a_1 x + \cdots + a_{2\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1} x^{2\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1}$$
qui est bien récursif.
2. Comme précédemment notre polynôme a une racine, il existe une p/q telle que p est négatif, $p \leq a_0$ et $q \leq a_n$. L'ensemble que l'on cherche est donc :
$$\exists x \leq a_0 \exists y \leq a_n\ a_0 y^n + \cdots + a_{2\lfloor n/2 \rfloor} x^{2\lfloor n/2 \rfloor} y^{n-2\lfloor n/2 \rfloor} = a_1 x y^{n-1} + \cdots + a_{2\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1} x^{2\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1} y^{n-2\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}$$

Exercice 5 (Une bijection primitive récursive d'inverse non primitif récursif, ou comment refaire la fin du Td précédent de façon moins ad-hoc) **:**

1. Soit f bijective récursive. La réciproque de f est donnée par $f^{-1}(y) = \mu x[f(x) = y]$.
2. (C'est la même question que 4.1) D'après le cours l'ensemble $B^1 = \{(i, t, x) \mid$ la machine i termine en un temps t sur $x\}$ est primitif récursif. Le graphe de T est donc lui aussi primitif récursif car c'est $\mathbb{1}_{B^1}(C^i(t, x), t, x)$ où C^i est la fonction constante égale à i. S'il existait g primitive récursive telle que $T(x) \leq g(x)$, $f(x)$ serait aussi borné par $T(x)$ comme une machine de Turing ne peut écrire qu'un | à chaque étape sur la bande de sortie. On aurait alors $f(x) = \mu y \geq g(x) \exists t \geq g(x) \mathbb{1}_{C_{\check{z}}}(i, t, x, y)$ qui serait récursive.
3. Comme $T(x) = \mu t\ \mathbb{1}_{\Gamma_T}(x, t)$ où Γ_T est le graphe de T, primitif récursif, il s'en suit que T est récursive. On a ensuite $g_0(0) = T(0)$ et $g_0(y+1) = \max(g_0(y) - 2y, T(y+1))$. Elle est donc bien récursive (totale). Comme $g_0(x)$ majore $T(x)$, il s'en suit que g_0 ne peut être récursive par la question précédente.
Le graphe de g_0 est donné par $\mathbb{1}_{\Gamma_{g_0}}(0, x) = x \dot{=} T(0)$ et $\mathbb{1}_{\Gamma_{g_0}}(y+1, x) = [\mathbb{1}_{\Gamma_{g_0}}(y, x-2) \wedge \exists t \leq x - 2(y+1) \mathbb{1}_{\Gamma_T}(y+1, t)] \vee [\mathbb{1}_{\Gamma_T}(y+1, x-2(y+1)) \wedge \exists t \leq x - 2 \mathbb{1}_{\Gamma_{g_0}}(y, t)]$ qui est bien primitif récursif (ce n'est pas un schéma de récurence primitive classique car il fait appel à tous les résultats de $g_0(y, t)$ pour $t < x$ mais on peut le coder en utilisant des suites dans le schéma de récurence primitive classique).
Enfin, g_0 est une fonction récursive (strictement) croissante totale. Comme montré dans l'exercice 1, son image est donc un ensemble récursif.
4. La fonction g_1 existe et elle est unique car deux fonctions strictement croissantes sont égales si et seulement si elles ont la même image.
Il suffit donc de montrer que g_1 est primitive récursive. On remarque d'abord que $g(x+1) \geq g(x) + 2$ et donc que $|\{i \in I_0 \mid i \leq 2n\}| \leq n + 1$. Il s'en suit donc que $g_1(x) \leq 2x$. On pose donc $g_1(0) = \mu t \leq 1\ \neg \mathbb{1}_{I_0}(t)$ et $g_1(x+1) = \mu t \leq 2x + 1\ t > g_1(x) \wedge \neg \mathbb{1}_{I_0}(t)$.
5. Comme les g_i sont strictement croissantes elles sont en particulier injectives. De plus, comme leurs images sont disjointes, h est aussi injective. Enfin comme leurs images recouvrent $\mathbb{N}$, h est surjective. La récursivité de h est une conséquence de la récursivité des g_i, mais h n'est pas primitive récursive sinon g_0 le serait, ce qui contredit la question 3.
Enfin, montrons que h^{-1} est primitive récursive. En effet, si $x \in I_0$, $h^{-1}(x) = 2[\mu t \leq x\ \mathbb{1}_{\Gamma_{g_0}}(t, x)]$ et si $x \notin I_0$, $h^{-1}(x) = 2[\mu t \leq x\ \mathbb{1}_{\Gamma_{g_1}}(t, x)] + 1$, ce qui permet de conclure. Pour les plus dubitatifs (ou les plus attentifs) le fait que Γ_{g_1} soit primitif récursif est une conséquence immédiate du fait que g_1 est elle-même primitive récursive.

Exercice 7 (Le retour des structures finies) **:**
Remarquons tout d'abord que quitte à remplacer les constantes c par un prédicat unaire U_c et les fonctions n-aire f par un prédicat $N+1$-aire R_f, et à rajouter dans T les formules qui disent que U_c est vrai en exactement 1 point et que R_f est un graphe de fonction. On peut supposer que $\mathcal{L}$ ne contient que des relations [1]. En effet tout modèle de notre nouvelle théorie induit un modèle de l'ancienne et vice-versa. Quitte à prendre comme unique relation le produit des relations de notre langage, on peut supposer que le langage est composé d'une unique relation [2] R. Enfin toute $\mathcal{L}$-structure finie est isomorphe à une $\mathcal{L}$ structure de domaine $\{1,\ldots,n\}$.
On code une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ (de domaine $\{1,\ldots,n\}$) par

$$\alpha_2(|M|, u(R^{\mathcal{M}}));\ u(R^{\mathcal{M}}) = \prod_{\bar{i}\in R^{\mathcal{M}}} \rho_{\alpha_k(\bar{i})}$$

où R est un prédicat k-aire, ρ énumère les nombres premiers de façon coirssante et α_i est une bijection primitive récursive de $\mathbb{N}^i$ dans $\mathbb{N}$ croissante en toute les variables. On peut alors vérifier que le code d'une structure de cardinal n est borné par $b(n) = \alpha_2(n, \pi_{\alpha_k(n\ldots n)}!)$ qui est récursive primitive et que l'ensemble des codes de structure I est primitif récurisif. On notera $\mathcal{M}_i$ la structure codée par $i \in I$.
De plus pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi[\bar{x}]$, la fonction $f_\varphi(i,\bar{j})$ qui vaut 1 si $\mathcal{M}_i \models \varphi[\bar{j}]$ est primitive récursive. En effet, si φ est atomique, il suffit de vérifier que pour tout $\rho(\bar{j})$ divise $\pi^2_2(i)$. Il en découle immédiatement que c'est aussi vrai pour φ sans quantificateurs car les prédicats primitifs récursifs sont clos par combinaison booléenne et enfin pour φ quelconque car les prédicats primitifs récursifs sont clos par quantification bornée (ici par $\pi^2_1(i)$).
La fonction que l'on cherche est donc $\exists i \leq b(n) \bigwedge_{\varphi\in T} f_\varphi(i)$.

Exercice 8 (Ensembles des fonctions récursivement énumérables) **:**

1. C'est le même argument que dans le cas primitif récursif. Supposons que $\psi \in \mathcal{F}^2$ énumère les récursives totales. Comme ψ_i est récursive totale pour chaque i, $\lambda i\, \psi(i,i)+1$ est récursive toale. Il existe donc i_0 telle que $\psi(i_0,x) = \psi(x,x)+1$ et donc $\psi(i_0,i_0) = psi(i_0,i_0)+1$, ce qui est absurde.
2. Soit ψ qui énumère les fonctions récursives. On définit alors $\theta(i,0) = \psi(i,0)$ et $\theta(i,x+1) = \max\{\theta(i,x)+1, \psi(i,x+1)\}$. La fonction θ est bien récursive (totale) et les θ_i sont primitives récursives strictement croissante. De plus si ψ_i est strictement croissante, $\theta_i = \psi_i$. La fonction θ énumère donc bien toutes les fonctions primitives récursives strictement croissantes.
3. On définit $\zeta(i,0) = \psi(i,0)$ et $\zeta(i,x+1) = \psi(i,x+1)$ si $\psi(i,x+1) \notin \{\zeta(i,t) \mid t \leq x\}$ et sinon $\zeta(i,x+1) = \max\{\zeta(i,t)+1 \mid t \leq x\}$. Cette fonction est récursive, chacune des ζ_i est primitive récursive injective et si ψ_i est primitive récursive injective, alors $\psi_i = \theta_i$.
4. Montrons d'abord le lemme suivant :

   Lemme 1 :
   Soit $\psi \in \mathcal{F}^2$ récursive telle que pour tout x, $A_x = \mathrm{Im}(\psi_x)$ est infini. Alors, il existe g récursive totale strictement croissante dont l'image n'est aucun des A_x.

   Démonstration. Soit g définie par $g(0) = 0$ et $g(x+1) = \psi(x, \mu t\ \psi(x,t) > g(x)) + 1$. Comme les A_x sont tous infinis, il est évident que g est récursive totale strictement croissante. De plus pour tout x, $y = \psi(x, \mu t\ \psi(x,t) > g(x)) \in A_x$ est tel que $g(x) < y < g(x+1)$ et donc $\mathrm{Im}(g)$ ne peut être égal à aucun des A_x. ■

   On conclut alors immédiatement en remarquant que si $f \in \mathcal{F}^1$ est injective (a fortiori strictement croissante) son image est infinie. Par le lemme l'existence d'un énumération des fonctions récursives totales injection (respectivement strictement croissante) implique l'existence d'une fonction récursive totale strictement croissante (et donc injective) qui ne peut être énumérée.

1. Il n'est pas nécessaire de faire une telle réduction mais cela facilite les notations.
2. Encore une fois, ce n'est pas nécessaire mais cela va nous simplifier la vie.