Silvain Rideau
Bureau T7

silvain.rideau@ens.fr
www.eleves.ens.fr/home/srideau

Corrigé du TD de Logique 10

3 décembre 2012

Exercice 5 (Séparabilité) **:**

1. Supposons qu'il existe $D \subseteq \mathbb{N}$ récursif tel que $A \subseteq D$ et $B \cap D = \emptyset$. Soit i_0 tel que φ_{i_0} soit la fonction caractéristique de D. Si $i_0 \in D$, $\varphi_{i_0}(i_0) = 1$ et donc $i_0 \in B$ ce qui contredit le fait que $D \cap B = \emptyset$. Si $i_0 \notin D$, $\varphi_{i_0}(i_0) = 0$ d'où $i_0 \in A \subset D$, ce qui est absurde.
   Un tel D ne peut donc pas exister.
2. Soient A et $B \subset \mathbb{N}$ disjoints de complémentaire récursivement énumérable. Soit $f_A \in \mathcal{F}^1$ récursive de domaine A^c et $f_B \in \mathcal{F}^1$ récursive de domaine B^c. Comme $A \cap B = \emptyset$, $A^c \cup B^c = \mathbb{N}$ et donc en tout point, une de ces deux fonctions est définie. Soient i_A et i_B des codes de f_A et f_B respectivement. On pose $t(x) = \mu y\ [B^1(i_A, x, y) \wedge B^1(i_B, x, y)]$ et $\mathbb{1}_D(x) = B^1(i_B, x, t(x))$ qui sont récursives totales. Montrons que D sépare A et B. Soit $x \in A$, on a alors $t(x) = T(i_B, x)$ car f_A n'est pas définie en x et donc $\mathbb{1}_D(x) = 1$, i.e. $x \in D$. D'autre part, si $x \in B$, on a $t(x) = T(i_A, x)$ et donc $\mathbb{1}_D(x) = 0$, i.e. $x \notin D$.

Exercice 6 :

On pose $g(0) = f(0)$ et $g(x+1) = f(\mu t\ f(t) \notin \{g(i) \mid i \leq x\})$. Comme l'image de f est infinie cette fonction est totale et elle est bien évidemment injective. Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, $f^{-1}(y)$ a un plus petit élément x_y et on aura $g(n) = y$ où $n = |\{x_{y'} < x_y \mid y' \in \mathrm{Im}(f)\}|$. Enfin g est récursive car elle est définie par récurence (généralisée).

Soit A récursivement énumérable non récursif. Il existe f récursive tel que $A = \mathrm{Im}(f)$ et par la question précédente il existe g récursive injective telle que $A = \mathrm{Im}(g)$.

Soit $g(x) = \mu y\ [y > x \wedge f(y) < x]$ qui est récursive. On a $\mathrm{dom}(g) = B$ et donc B est récursivement énumérable. Si le complémentaire de B est fini, il a en particulier un plus grand élément y_0 tel que pour tout $x > y_0$, $x \in B$. On pose alors $x_0 = y_0 + 1$ et $x_{n+1} > x_n$ tel que $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. La suite des $f(x_n)$ est alors une suite infinie strictment décroissante, ce qui est absurde. Le complémentaire de B est donc infini.

Soit g récursive totale telle que $\mathrm{Im}(g) = C$. Posons $h(x) = g(\mu t\ f(g(t)) > x)$. Comme C est infini et f injective, g est récursive totale. On a alors $h(x) \in C \subseteq B^c$ et donc pour tout $y > h(x)$, $f(y) \geq f(h(x)) > x$. On a alors $\mathbb{1}_A = \exists t \leq h(x)\ f(t) = x$, qui est donc bien récursive.

Si A est récursivement énumérable non récursif, on sait que c'est l'image d'une fonction récursive qu'on peut supposer injective. Soit B tel que dans les question précédentes, alors B est récursivement énumérable de complémentaire infini et si C est récursivement énumérable infini, on ne peut pas avoir $B \cap C = \emptyset$ car par la question précédente cela contredirait le fait que A n'est pas récursif.

Exercice 7 (Rappel de la feuille précente : Ensembles des fonctions récursivement énumérables) **:**
Les premières question sont corrigées dans le Td précédent.

5. Soit i_0 un code de ψ. On a alors $\psi_i(x) = \varphi^2_{i_0}(i, x) = \varphi^1_{s^1_1(i_0,i)}(x)$. Il suffit donc de prendre $f(i) = s^1_1(i_0, i)$.