

ENS

Rapport de stage de L3, cursus mixte maths-physique

# Perturbation oscillatoire de l'équation de Navier Stokes

## Instabilité paramétrique subharmonique

---

Élève :

Thomas Lehéricy

Encadrant de mathématiques :

David Gérard-Varet (Université Paris 7)

Encadrants de physique :

Thierry Dauxois et Hélène Scolan (ENS Lyon)

## Résumé

La prévision de la dynamique atmosphérique ou océanique est un problème qui a toujours fasciné les scientifiques. Elle est extrêmement utile : pour l'agriculture (prévision à court terme des précipitations, des orages, de la grêle, des températures, ou à long terme pour déterminer quelle culture favoriser) et pour l'industrie alimentaire, pour la production d'énergie (éoliennes, centrales marémotrices, éoliennes sous-marines, choix des sites d'implantation de ces énergies), pour le transport de marchandises (tracé des routes commerciales les plus sûres et économiques), pour prévoir les catastrophes naturelles (tsunamis, cyclones, tornades, tempêtes, etc), et pour de nombreuses autres applications. Elle est également extrêmement complexe, puisqu'interviennent dans ce problème la stratification en densité des fluides considérés, les effets dûs au relief (terrestre ou sous-marin), les apports de chaleur et d'énergie (provenant du soleil, de l'interaction entre les fluides, des marées, etc), ainsi que la rotation de la Terre autour de son axe.

Dans mon stage, j'ai étudié deux aspects de cette problématique, en utilisant des approches très différentes.

La partie mathématique porte sur une perturbation oscillatoire à paramètre de l'équation de Navier Stokes, dont un cas particulier est l'équation de Navier Stokes dans un référentiel en rotation uniforme, et aux propriétés des solutions lorsque le paramètre tendait vers 0 (analogue au cas où la vitesse de rotation tend vers l'infini). J'ai travaillé sur l'article d'Emmanuel Grenier : *oscillatory perturbations of the Navier Stokes equation* (Grenier (1997)).

La partie physique a pris la forme d'un séjour d'un mois dans l'équipe Ondes Internes du laboratoire de Physique de l'ENS Lyon. J'ai pu participer à leur recherche sur l'instabilité paramétrique subharmonique, qui est présente dans les milieux stratifiés tels que l'océan ou l'atmosphère, et qui peut contribuer au brassage de l'eau des océans.

Je remercie mon encadrant de mathématiques, David Gérard-Varet, qui a toujours été là pour répondre à mes questions.

J'ai eu le bonheur de faire partie pendant un mois d'une équipe très sympathique, et je remercie tous ses membres pour m'avoir si bien accueilli et aidé : Baptiste Bourget, Ernesto Horne, et surtout mes encadrants Hélène Scolan et Thierry Dauxois.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Une perturbation oscillatoire de l'équation de Navier Stokes</b>	<b>4</b>
1.1	Solutions turbulentes (de Leray) de l'équation de Navier-Stokes . . . . .	6
1.1.1	(NS) : formulation faible et inégalité d'énergie . . . . .	6
1.1.2	Comment éliminer la pression . . . . .	7
1.1.3	Décomposition de Helmholtz et projecteur de Leray . . . . .	8
1.1.4	Existence de solutions de Leray en temps infini . . . . .	9
1.1.5	Idée de démonstration : méthode de Galerkin . . . . .	9
1.2	Perturbations oscillatoires de (NS) . . . . .	11
1.2.1	Présentation de l'équation de Navier-Stokes perturbée . . . . .	11
1.2.2	Solutions filtrées . . . . .	12
1.2.3	Théorèmes . . . . .	13
1.2.4	Solutions faibles . . . . .	13
1.2.5	Solutions fortes . . . . .	14
1.3	Applications . . . . .	15
1.3.1	Calcul de Q dans un cas particulier . . . . .	15
1.3.2	Propriétés . . . . .	16
1.3.3	Cas de la force de Coriolis . . . . .	18
<b>2</b>	<b>L'instabilité paramétrique subharmonique</b>	<b>20</b>
2.1	Introduction . . . . .	21
2.1.1	Origine des ondes internes . . . . .	21
2.1.2	Propriétés des ondes internes . . . . .	23
2.1.3	Introduction à la PSI . . . . .	27
2.2	Présentation du dispositif et protocole expérimental . . . . .	29
2.3	Résultats . . . . .	32
2.3.1	Analyse temps-fréquence . . . . .	32
2.3.2	Transformée de Hilbert . . . . .	33
2.3.3	Evolution temporelle . . . . .	35
2.4	Discussion . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>Annexe</b>	<b>41</b>
4.1	Obtention d'une stratification linéaire . . . . .	41
4.1.1	La méthode des deux bacs . . . . .	41
4.1.2	Vérification de la stratification . . . . .	42

# 1 Une perturbation oscillatoire de l'équation de Navier Stokes

La dynamique d'un fluide incompressible est régie dans un référentiel galiléen par l'équation de Navier-Stokes

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} F_V + \nu \Delta u$$

où  $F_V$  sont les forces volumiques, et par la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div} u = 0 .$$

En général il s'agit uniquement de la gravitation. Il faut lui ajouter des conditions aux limites et des conditions initiales pour s'assurer de l'existence et de l'unicité des solutions. Ce problème est *bien posé* lorsqu'il possède de bonnes propriétés d'existence et d'unicité, et une bonne continuité vis-à-vis des conditions initiales (par exemple existence et unicité de solutions en temps fini).<sup>1</sup>

Mais la Terre n'est pas un référentiel galiléen, ce qui rend la dynamique atmosphérique si intéressante.

Dans un référentiel non galiléen, il est possible d'adapter l'équation en ajoutant un terme et en modifiant le champ de pression. Dans le cas de la Terre, en rotation à vitesse uniforme autour de son axe, on a deux termes qui s'ajoutent à l'accélération : la force centrifuge, qu'on peut incorporer au champ de pression, et la force de Coriolis

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} F_V + \nu \Delta u + \Omega \wedge u .$$

On peut raisonnablement s'interroger sur le comportement des solutions lorsque la vitesse de rotation prend des valeurs de plus en plus grande, et que la force de Coriolis devient le terme dominant la dynamique. On peut notamment étudier le comportement asymptotique des solutions pour des conditions initiales données, lorsque la vitesse de rotation tend vers l'infini.

Ce problème peut être vu comme un cas particulier de *perturbation oscillatoire de l'équation de Navier Stokes*

$$\partial_t u^\epsilon + (u^\epsilon \cdot \nabla)u^\epsilon + \nabla p - \Delta u^\epsilon + \frac{L(u^\epsilon)}{\epsilon} = 0 .$$

Elles sont obtenues en ajoutant un terme supplémentaire, qui n'aura pas d'effet sur l'énergie. Les conditions précises seront précisées dans le chapitre 2. Ici, on prend  $\nu$ , la viscosité, égale à 1, par souci de simplification des calculs.

Dans un premier temps, nous présenterons les méthodes utilisées pour montrer l'existence de solutions de Leray pour le système de Navier Stokes bien posé. Nous présenterons ensuite les résultats obtenus par Emmanuel Grenier dans son article (donner la référence) dans le cas général d'une perturbation oscillatoire. Enfin, nous appliquerons ces résultats

---

1. Le problème de l'existence et de l'unicité des solutions de Navier Stokes en temps infini est toujours ouvert dans le cas général.

à différents exemples comme la force de Coriolis ou l'équation de Navier-Stokes pour un fluide compressible.

On est capable de montrer l'existence de solutions en temps fini pour des conditions initiales assez régulières. Mais on ne sait pas s'il existe des solutions en temps infini, sans singularité en temps fini, quelle que soit la donnée initiale ! Le problème du millénaire de la fondation Clay consiste à montrer que pour toute condition initiale, il n'y a jamais de singularité, donc que la solution est définie en temps arbitrairement grand, ou à montrer qu'il existe une configuration initiale telle que la solution admet une singularité en temps fini.

On n'a de résultat d'existence en temps infini que pour des solutions plus faibles, appelées solutions turbulentes. C'est le premier résultat d'existence globale sans condition connu, et il est resté le seul pendant près de 60 ans. Il a été montré par J. Leray en 1933.

## 1.1 Solutions turbulentes (de Leray) de l'équation de Navier-Stokes

Pour trouver des solutions en temps infini, il est nécessaire de considérer un type de solutions faible : les solutions au sens des distributions. La notion de régularité sera donc beaucoup plus faible que pour les solutions fortes : on utilisera plutôt des espaces de Sobolev et de Banach. On peut trouver des solutions en temps infini, mais on perd la propriété d'unicité des solutions : on ne sait pas encore si elle est vraie.

### Définitions et notations

- $\Omega$ , un ouvert borné, régulier (par exemple Lipschitz), éventuellement connexe, de  $\mathbb{R}^d$  sur lequel on travaille.
- $L^p$  pour  $1 \leq p < \infty$ , norme  $\|f\|_p^p = \int f(x)^p dx$
- $L^\infty$ , de norme  $\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0, \text{p.s. } |f(x)| \leq M\}$
- L'espace des fonctions test,  $D(\Omega) = \{\text{fonctions } C^\infty \text{ à support compact dans } \Omega \text{ à valeur dans } \mathbb{R}\}$
- Un espace plus pratique,  $D_\sigma(\Omega) = \{\phi \in D(\Omega)^d, \text{div}(\phi) = 0\}$
- $H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \text{ telles que } \hat{f}(k)(1+k^2)^s \in L^2\}$ . Si  $s$  est un entier positif, c'est l'espace des fonctions donc les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre  $s$  sont dans  $L^2$ . Cette seconde définition permet de définir les espaces de Sobolev  $H^s(\Omega)$  pour  $\Omega$  borné :
  - \* pour  $s \geq 0$ , il s'agit des distributions dont les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre  $s$  sont  $L^2$  ;
  - \* pour  $s < 0$ , on définit  $H^s$  comme le dual de  $H^{-s}$  avec des conditions aux limites cohérentes (pour qu'il n'y ait pas de terme de bord dans l'IPP).
  - \* pour  $s$  non entier, on peut le définir par interpolation.
- $H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \text{ telles que } f|_{\partial\Omega} = 0\}$
- $H(\Omega) = \text{adhérence de } D_\sigma(\Omega) \text{ dans } L^2(\Omega)^d$
- $V(\Omega) = \text{adhérence de } D_\sigma(\Omega) \text{ dans } H_0^1(\Omega)^d$

### 1.1.1 (NS) : formulation faible et inégalité d'énergie

On étudie l'équation de Navier-Stokes avec viscosité sur un ouvert  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^d$ , pour un fluide incompressible, avec des conditions aux bords non perméables (les solutions de cette équation sont dites "fortes") :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \Delta u = 0 \\ \text{div}(u) = 0 \\ u_{t=0} = u_0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En prenant l'intégrale en espace et en temps de cette équation contre une fonction test, on obtient la formulation faible de (NS) (toutes les solutions fortes la vérifient) :

$$\forall \Phi \in C^1([0, T[, D(\Omega)),$$

$$\langle \nabla u, \nabla \Phi \rangle - \langle u \otimes u, \nabla \Phi \rangle - \langle u, \partial_t \Phi \rangle - \langle p, \text{div}(\Phi) \rangle = - \int_{\Omega} u_0 \Phi(0, \cdot) \quad (2)$$

La signification physique de cette formulation faible est que les instruments de mesure réels ne peuvent avoir accès à la valeur de la fonction en un point, mais seulement à une

moyenne pondérée autour de ce point, caractérisé par sa pondération  $\Phi$ . La formulation faible de Navier Stokes signifie alors que toute mesure de la valeur de  $\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \Delta u$  donnera zéro.

Pour une condition initiale dont la norme  $L^2$  et celle de sa dérivée sont finies ( $\Leftrightarrow u_0 \in H^1$ ), si on ajoute à cette équation une condition de régularité et l'inégalité d'énergie (on obtient l'égalité d'énergie en intégrant contre  $u$  elle-même pour  $u$  assez régulier), on dit alors que  $u$  est une solution de Leray de (NS) sur  $[0, T[$ .

### Inégalité d'énergie.

$\forall t \geq 0,$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t, \cdot)|^2 + \nu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0|^2 \quad (3)$$

La condition de régularité sera de la forme " $L^\infty L^2 \cap L^2 H^1$ " : on borne la norme  $L^2$  du champ de vitesse uniformément en temps, et à la fois sa norme  $L^2$  et la norme  $L^2$  de sa dérivée spatiale en espace selon une norme  $L^2$  en temps.

Cette condition est incluse dans l'inégalité d'énergie !

Si le champ de vitesse est assez régulier (ni concentration, ni oscillations trop rapides menant à une singularité) et en l'absence de termes supplémentaires, on aura l'égalité d'énergie, exprimant que l'énergie cinétique initialement présente dans le champ est dissipée par la viscosité uniquement. Sinon, il peut y avoir perte de masse lors du passage à la limite à la singularité, dans le terme  $\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2$ .

On a aussi inclus dans la condition de régularité la condition d'imperméabilité et celle d'incompressibilité. La formulation mathématique exacte est :

$$u \in L^\infty(]0, T[, H(\Omega)) \cap L^2(]0, T[, V(\Omega))$$

où  $H(\Omega)$  est l'adhérence de  $D_\sigma$  dans  $L^2$  et  $V(\Omega)$  celle de  $D_\sigma$  dans  $H_0^1$  (Pour  $\Omega$  Lipschitz, c'est aussi l'ensemble des distributions  $H^1$  de divergence nulle et de trace nulle).

Cette condition supplémentaire est donc naturelle. Mais il reste encore un petit détail avant d'arriver à ce qu'on appelle les solutions de Leray.

### 1.1.2 Comment éliminer la pression

On voit apparaître dans l'équation (1.2) la divergence de la fonction test. L'idée est de ne prendre que celles de divergence nulle pour éliminer le terme de pression, qui est une inconnue "en trop". On prend donc les fonctions test dans  $C^1([0, T[, D_\sigma(\Omega))$ , et on obtient :

$$\forall \Phi \in C^1([0, T[, D_\sigma(\Omega)),$$

$$\langle \nabla u, \nabla \Phi \rangle - \langle u \otimes u, \nabla \Phi \rangle - \langle u, \partial_t \Phi \rangle = - \int_{\Omega} u_0 \Phi(0, \cdot) \quad (4)$$

On se ramène ainsi à une équation à  $d$  inconnues (les composantes du champ de vitesse) au lieu de  $d + 1$  (le champ de vitesse et le champ de pression).

La question naturelle qui s'ensuit est : peut-on faire marche arrière ? Est-ce que, une fois qu'on a une solution, on peut trouver un champ de pression qui permet de satisfaire (1.2) ? La réponse est oui ! En effet, on a le théorème suivant :

**Théorème.**

Soit  $F$  une distribution telle que  $\forall \Phi \in D_\sigma(\Omega), \langle F, \Phi \rangle = 0$ . Alors  $F$  est le gradient d'une distribution :  $F = \nabla p$ .

La propriété suivante assure que la distribution ainsi obtenue est assez régulière pourvu que son gradient soit également assez régulier.

**Propriété (Régularité du champ de pression).**

- Si  $F$  est dans  $H^{-1}$ , alors  $p$  est dans  $L^2_{loc}$ .
- Si  $F$  est dans  $L^2$ , alors  $p$  est dans  $H^1_{loc}$ .

Réécrivons (1.2) pris contre une fonction test  $\Phi \in C^1([0, T[, D_\sigma(\Omega))$  :

$$\langle \Delta u - (u \cdot \nabla)u - \partial_t u, \Phi \rangle = 0 \tag{5}$$

Soit, en utilisant le théorème, on peut trouver un  $p$  tel que

$$-\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \partial_t u = -\nabla p \tag{6}$$

On s'est ainsi ramené à un système triangulaire d'équations : on résout d'abord l'équation d'inconnue  $u$ , puis celle d'inconnue  $p$  à l'aide du  $u$  trouvé auparavant. On dispose également d'une propriété permettant de déterminer la régularité du champ de pression.

Attention ! En dimension 3, en général, il n'est pas possible de connaître la régularité du champ de pression. En effet, on ne peut borner que  $\partial_t u + \nabla p$  ! Déterminer la régularité de  $p$  est un problème ouvert en domaine borné. En revanche, si  $\Omega = \mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{T}^d$ , il y a des résultats. En dimension 2, on sait que  $p$  et  $\partial_t u$  sont dans  $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ .

Formellement, en prenant la divergence de (1), on trouve

$$\operatorname{div}((u \cdot \nabla)u) = -\Delta p .$$

Si  $u$  est assez régulier, on peut donc inverser le laplacien pour retrouver  $p$ .

### 1.1.3 Décomposition de Helmholtz et projecteur de Leray

Cette section va montrer comment éliminer d'une autre manière la pression.

**Propriété (Décomposition de Helmholtz).**

$$L^2(\Omega)^d = H(\Omega) \oplus^\perp G(\Omega)$$

où  $G(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^d \mid \exists p \in L^2_{loc}(\Omega), u = \nabla p\}$ .

$P$ , le projecteur de Leray dans  $L^2(\Omega)^d$ , est le projecteur orthogonal sur  $H(\Omega)$ .

En utilisant ce projecteur dans l'équation (1.1), on peut se passer de n'utiliser que des fonctions test dans  $D_\sigma(\Omega)$ . Il est néanmoins toujours nécessaire de retrouver  $p$  par la suite. On ne dispose pas de plus de résultat sur la régularité de  $p$  qu'avec la méthode précédente.

En domaine sans bord ou dans le tore en dimension  $d$ , le projecteur de Leray a une forme explicite. On ne dispose cependant pas d'information supplémentaire par rapport au cas borné.

#### 1.1.4 Existence de solutions de Leray en temps infini

Soit  $u_0 \in H(\Omega)$ . Une solution de Leray de (NS) sur  $[0, T[$  est une fonction

$$u \in L^\infty(]0, T[, H(\Omega)) \cap L^2(]0, T[, V(\Omega))$$

telle que  $\forall \Phi \in C_c^1([0, T[, D_\sigma(\Omega))$ ,

$$\int_T^0 \int_\Omega \nabla u \nabla \Phi - u \otimes u \nabla \Phi - u \partial_t \Phi = - \int_\Omega u_0 \Phi(0, \cdot)$$

et

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u(t, \cdot)|^2 + \nu \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0|^2$$

On retrouve les conditions mentionnées dans la partie 1.1. Pour que les solutions aient un sens physique, il faut assurer une certaine régularité, d'où l'inégalité d'énergie. La condition  $L^\infty L^2 \cap L^2 H^1$  assure qu'on peut l'écrire.

#### **Théorème.**

Pour tout  $u_0$  dans  $H(\Omega)$ , il existe une solution de Leray de Navier-Stokes, définie pour tout temps positif.

Problèmes ouverts :

- unicité de la solution de Leray de Navier-Stokes en dimension 3 (on peut en trouver une par approximation, pas forcément toutes).
- Egalité d'énergie en dimension 3 (on sait la montrer en dimension 2)

#### 1.1.5 Idée de démonstration : méthode de Galerkin

On construit une suite de solutions approchées en se ramenant à un espace fonctionnel de dimension finie, à la fois pour les solution et pour les fonctions test (exemple : celui engendré par un nombre fini de vecteurs propres de l'opérateur solution de l'équation de Stokes (autoadjoint compact positif) ) :

$$T : f \in H(\Omega) \mapsto u \in H(\Omega)$$

où  $u$  est la solution de  $-P\Delta u = f$  et  $u|_{\partial\Omega} = 0$

On borne uniformément les éléments de cette suite pour avoir une convergence faible (à extraction près) vers une distribution  $u$ , dont on estime la régularité. On ne peut pas

en l'état montrer que la limite est solution de Navier Stokes, car la convergence faible n'implique pas la convergence des termes quadratiques. Par exemple,  $\sin(\frac{t}{\epsilon}) \rightharpoonup 0$  mais  $\sin^2(\frac{t}{\epsilon}) \rightharpoonup 1/2$  : les oscillations peuvent contribuer au flux moyen *via* le terme quadratique (par un phénomène de résonance). Il est donc nécessaire de disposer d'un résultat plus fort pour contrôler ce terme.

On évalue donc une borne sur la dérivée en temps de cette limite, pour appliquer ensuite un théorème de compacité forte (Aubin-Lions) à l'aide de ces bornes. Dans un certain espace, la suite converge donc fortement à extraction près vers sa limite faible. On peut du coup passer à la limite dans l'équation et dire que la limite  $u$  vérifie l'équation de Navier-Stokes. L'inégalité d'énergie est plus simple, elle découle de la convergence faible.

## 1.2 Perturbations oscillatoires de (NS)

Le système de Navier-Stokes précédent n'est valable que si le fluide est considéré dans un référentiel galiléen. Remarquons que dans ce système, le fluide est immobile près de ses frontières dans le référentiel d'étude. Si on veut considérer la dynamique atmosphérique ou océanique, il faut se placer dans le référentiel terrestre. Dans ce cas, il est nécessaire d'introduire un nouveau terme dans l'équation : les forces d'inerties. On peut modifier l'équation pour que le seul terme restant soit la force de Coriolis. L'équation décrivant la dynamique de fluides incompressibles dans un référentiel en rotation à vitesse constante est

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \Delta u + \Omega \wedge u$$

où  $p' = p - \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2$  est la pression corrigée pour tenir compte du terme centrifuge, avec  $r$  la distance du point considéré à l'axe de rotation, et où  $\Omega$  est le vecteur rotation du référentiel d'étude par rapport à un référentiel galiléen. Le cas  $\Omega = 0$  correspond au cas où on se place dans un référentiel galiléen. Quand  $\Omega$  est non nul, on voit apparaître des ondes d'inerties (par exemple les ondes de Rossby : si le champ de vitesse est uniforme, le vecteur vitesse précède autour de  $\Omega$ ), qui deviennent le phénomène prépondérant pour des vitesses de rotation élevées (leur contribution à  $\partial_t u$  ne peut être bornée qu'en  $1/\Omega$ ). On peut donc s'interroger sur l'existence d'une sorte de limite pour la dynamique à  $\Omega \rightarrow +\infty$ .

### Remarque.

On peut aussi mettre un terme en  $1/\epsilon$  devant le champ de pression. Ce n'est qu'une question d'écriture, mais elle ouvre la voie à l'approximation géostrophique, qui consiste à étudier le cas où le champ de vitesse et d'accélération est borné uniformément en  $\epsilon$ . C'est alors le champ de pression qui compense le terme pénalisé.

La différence ici consiste à étudier le cas général, où on n'a pas fait cette approximation. De toute façon, on pourra éliminer le champ de pression, et on n'obtiendra que la composante "mal posée"... A composante non linéaire près : elle pourra avoir un effet moyen sur la composante géostrophique ! Identifier la composante géostrophique : quand on élimine ce qui génère des oscillations, on obtient qc, et ce n'est pas forcément la limite asymptotique.

Ce problème peut être généralisé à d'autres perturbations qui, comme la force de Coriolis, n'influent pas sur l'énergie contenue dans le champ de vitesse.

### 1.2.1 Présentation de l'équation de Navier-Stokes perturbée

On s'intéresse au système suivant, pour  $\Omega = \mathbb{T}^d$  où  $d=2$  ou  $3$  :

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon + (u^\epsilon \cdot \nabla)u^\epsilon + \nabla p - \Delta u^\epsilon + \frac{L(u^\epsilon)}{\epsilon} = 0 \\ \operatorname{div}(u^\epsilon) = 0 \\ u^\epsilon|_{t=0} = u_0^\epsilon \end{cases} \quad (7)$$

avec  $u_0^\epsilon \rightarrow u_0$  dans  $L^2$ .

La "perturbation"  $L$  est dite oscillatoire lorsque l'opérateur linéaire solution de l'équation d'onde associée (où  $P$  est le projecteur de Leray sur les champs de divergence nulle dans  $L^2$ ) :

$$\begin{cases} \partial_t v + PL(v) = 0 \\ \operatorname{div}(v) = 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (8)$$

conserve la norme dans  $H^s$  pour tout  $s$  réel. Si on l'appelle  $\Gamma(t)$ , l'opérateur qui à  $v_0$  associe le champ de vitesse au temps  $t$ , on a formellement  $\Gamma(t) = \exp(-tL)$ , et  $\Gamma(t)$  vérifie  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall v_0 \in H^s$  :

$$\begin{cases} \|\Gamma(t)v_0\|_{H^s} = \|v_0\|_{H^s} \\ \|\Gamma^t(t)v_0\|_{H^s} = \|v_0\|_{H^s} \end{cases} \quad (9)$$

La perturbation va générer des ondes non évanescences, de grande vitesse (de l'ordre de  $\frac{1}{\epsilon}$ ), qui se propageront dans le milieu. Ces ondes sont visibles dans le cas où on considère un champ de vitesse uniforme à  $t = 0$  : la dynamique est alors décrite par l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{L(u)}{\epsilon} + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

La pression solution est  $p = \text{constante}$ , et le champ de vitesse solution est  $u(r, t) = \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right)u_0$ .

Une interprétation possible du paramètre  $\epsilon$  est de considérer l'exemple  $L(u) = u \times B$  de la force de Coriolis. On peut alors réinterpréter  $\epsilon$  comme le nombre de Rossby, proportionnel à  $1/\Omega$ , et les ondes générées comme les ondes de Rossby : le champ de vitesse précesse autour du vecteur rotation.

L'objectif est d'étudier le comportement asymptotique des solutions de cette équation quand on fait tendre  $\epsilon$  vers 0.

### 1.2.2 Solutions filtrées

On remarque que quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , le terme  $\partial_t u^\epsilon$  n'est pas bornée, vu qu'il croît en  $1/\epsilon$ . Ce sont des vagues oscillant très rapidement qui sont à l'origine de ce caractère non borné. Essayons de les filtrer (pour moyenner leur effet).

On peut considérer en première approximation que pour elles, seul le terme "pénalisé" (celui en  $1/\epsilon$ ) joue un rôle. Si on résoud l'équation où on ne garde que le terme en  $1/\epsilon$  (l'équation d'onde associée, (2.2), écrite précédemment), on a que  $u^\epsilon = \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right)u_0^\epsilon$ . Si on

compose à gauche par  $\Gamma\left(\frac{-t}{\epsilon}\right)$ , on obtient

$$v^\epsilon := \Gamma\left(\frac{-t}{\epsilon}\right)u^\epsilon = u_0^\epsilon$$

qui est la valeur à  $t=0$ . Ces fonctions filtrées sont beaucoup plus sympathique que les vraies solutions, car on a éliminé les oscillations, on a plus d'information dessus, elles sont uniformément bornées, convergent fortement, etc.

Si on utilise maintenant ce filtrage dans l'équation, on peut espérer éliminer les ondes et avoir accès au comportement asymptotique. On trouve après substitution l'équation en  $v^\epsilon$  :

$$\partial_t v^\epsilon + \Gamma \left( \frac{-t}{\epsilon} \right) P \nabla \left( \Gamma \left( \frac{t}{\epsilon} \right) v^\epsilon \otimes \Gamma \left( \frac{t}{\epsilon} \right) v^\epsilon \right) - \Gamma \left( \frac{-t}{\epsilon} \right) \Delta \Gamma \left( \frac{t}{\epsilon} \right) v^\epsilon = 0 \quad (10)$$

On a ainsi éliminé le terme pénalisé. Comme le  $\Gamma$  est une isométrie dans les espaces de Sobolev  $H^s$ , on a très facilement une borne de la dérivée en temps de  $v^\epsilon$ .

Le problème est maintenant d'étudier le comportement des deux termes qu'on a modifié. On peut les voir comme un terme de transport :

$$Q_t^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) = \Gamma \left( \frac{-t}{\epsilon} \right) P \nabla \left( \Gamma \left( \frac{t}{\epsilon} \right) v^\epsilon \otimes \Gamma \left( \frac{t}{\epsilon} \right) v^\epsilon \right) \quad (11)$$

et un terme de diffusion :

$$D_t^\epsilon(v^\epsilon) = \Gamma \left( \frac{-t}{\epsilon} \right) \Delta \Gamma \left( \frac{t}{\epsilon} \right) v^\epsilon \quad (12)$$

L'équation (2.4) peut donc être réécrite :

$$\partial_t v^\epsilon + Q_t^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) - D_t^\epsilon(v^\epsilon) = 0 \quad (13)$$

En pratique, pour la force de Coriolis par exemple (et pour d'autres aussi), l'opérateur de diffusion est très simple :  $\Gamma$  commute avec les dérivées spatiales, donc  $D_t^\epsilon = \Delta$ . Le problème repose donc entièrement sur  $Q^\epsilon$ .

### 1.2.3 Théorèmes

#### 1.2.4 Solutions faibles

##### Propriété 1.

Il existe des solutions faibles globales en temps de (2.1) pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$ , et elles sont uniformément bornées dans  $L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T], H^1(\Omega))$  pour tout  $T > 0$ .

**Théorème 1.**

Si  $u^\epsilon$  est une suite de solutions de (2.1) uniformément bornées dans cet espace et définies sur  $[0, T]$ , alors

- $v^\epsilon = \Gamma\left(\frac{-t}{\epsilon}\right) u^\epsilon$  converge à extraction près dans  $C^0([0, T], D'(\Omega))$  et dans  $L^2([0, T], H^s(\Omega))$  pour tout  $s < 1$  vers  $v$ .
- La dérivée en temps de  $v$  est bornée dans  $L^{4/3}([0, T], H^{-1}(\Omega))$  en dimension 3, et satisfait une borne analogue en dimension 2. Par ailleurs,  $v_0 = u_0$ .
- $\forall s < 1$ ,  $u^\epsilon - \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right) v \rightarrow 0$  dans  $L^2([0, T], H^s(\Omega))$
- $v$  vérifie l'équation

$$\partial_t v + Q(v, v) - D(v) = 0 \quad (14)$$

où  $Q(v, v)$  est la limite au sens des distributions de  $Q_t^\epsilon(v, v)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$  et  $D(v)$  celle de  $D_t^\epsilon(v)$ . Dans tous les cas considérés elle est indépendante du temps, donc on peut se dispenser de le mettre en indice.

**1.2.5 Solutions fortes****Propriété 2.**

Si  $u_0^\epsilon$  est une suite bornée de  $H^s(\Omega)$  (pour un  $s > d/2 + 1$ ) qui converge vers  $u_0$  dans  $H^s(\Omega)$ , alors il existe un temps  $T > 0$  et des solutions fortes  $u^\epsilon$  de (2.1) définies sur  $[0, T]$ , uniformément bornées dans  $C([0, T], H^s(\Omega))$ .

**Théorème 2.**

Si  $u^\epsilon$  est une suite de solutions fortes de (2.1), bornée dans  $C([0, T], H^s(\Omega))$ , alors :

- $v^\epsilon = \Gamma\left(\frac{-t}{\epsilon}\right) u^\epsilon$  converge fortement à extraction près dans  $C([0, T], H^{s'-2}(\Omega))$  pour tout  $s' < s$  vers  $v$ .
- $v_0 = u_0$ , et  $v$  vérifie l'équation

$$\partial_t v + Q(v, v) - D(v) = 0 \quad (15)$$

où  $Q(v, v)$  est la limite forte dans  $C([0, T], H^{s'-2}(\Omega))$  de  $Q_t^\epsilon(v, v)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$  et  $D(v)$  celle de  $D_t^\epsilon(v)$ . Dans tous les cas considérés elle est indépendante du temps, donc on peut se dispenser de le mettre en indice.

### 1.3 Applications

Dans certains cas, il est possible de calculer  $Q$  et  $D$ . C'est le cas par exemple pour la force de Coriolis. On étudiera le cas du tore (conditions aux limites périodiques) avec une expression particulière de  $L$  en séries de Fourier. Ce cas est assez général, et on peut déjà trouver des résultats intéressants qui seront détaillés dans la seconde partie. Enfin, on présentera l'application des méthodes présentées ici au cas de la force de Coriolis 2D, analogue mais plus simple que le cas 3D.

Le calcul de  $Q$  est facilité lorsque  $L$  a une forme particulière en séries de Fourier. Dans ce cas, on calcule tout en Fourier avant de revenir dans l'espace réel. On se place sur le tore en dimension  $d$ ,  $\mathbb{T}^d$ .

#### 1.3.1 Calcul de $Q$ dans un cas particulier

On suppose que  $L$  a la forme particulière

$$PLv = -\mathcal{F}^{-1}i\omega(k)\mathcal{F}v(k)$$

donc

$$\Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right)v = \mathcal{F}^{-1}\exp\frac{i\omega(k)t}{\epsilon}\mathcal{F}v. \quad (16)$$

A chaque  $k$ , on associe un  $\omega(k)$  particulier : la relation de dispersion peut être arbitraire mais reste assez générale. Cette forme permet de calculer  $Q$  et  $D$  en dimension finie quelconque. La force de Coriolis 2D rentre dans ce cas.

On remarque tout d'abord que dans ce cas,  $D = \Delta$ , car  $\Gamma$  et les dérivées spatiales commutent. On peut aussi calculer  $Q$  :

#### Propriété 3.

En dimension 2,

$$Q(v, v) = P\nabla\mathcal{F}_k^{-1}\sum_{(k, k') \in S, k+k'=k''} \mathcal{F}_k v(k) \otimes \mathcal{F}_{k'} v(k') \quad (17)$$

avec  $S = \{(k, k') \in \mathbb{Z}^2, \omega(k) + \omega(k') = \omega(k + k')\}$

**Démonstration :** On rappelle l'expression de  $Q_t^\epsilon$  :

$$Q_t^\epsilon(v, v) = \Gamma\left(\frac{-t}{\epsilon}\right)P\nabla\left(\Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right)v \otimes \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right)v\right)$$

Approchons  $v$  à l'aide d'une suite de fonctions  $(w_n)$  de  $C_c^\infty$  qui convergent vers  $v$  dans  $L^2(]0, T[, H^s)$  quand  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $s$  dans  $[0; 1]$ . On va d'abord calculer  $Q$  pour ces fonctions, plus souples d'utilisation.

Pour  $j = 1, 2$ , en utilisant l'expression de  $\Gamma$  précisée ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}
Q_t^\epsilon(v_n, v_n) &= \Gamma\left(\frac{-t}{\epsilon}\right) P\nabla\left(\Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right) v_n \otimes \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right) v_n\right) \\
&= \Gamma\left(\frac{-t}{\epsilon}\right) P\nabla\mathcal{F}_{k''}^{-1}\left(\sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^2, k+k'=k''} e^{i(\omega(k)+\omega(k'))\frac{t}{\epsilon}} \mathcal{F}_k v_n(t, k) \mathcal{F}_{k'} v_n(t, k')\right) \\
&= \Gamma\left(\frac{-t}{\epsilon}\right) P\mathcal{F}_{k''}^{-1}\left(\sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^2, k+k'=k''} e^{i(\omega(k)+\omega(k'))\frac{t}{\epsilon}} ik_j'' \mathcal{F}_k v_n(t, k) \mathcal{F}_{k'} v_n(t, k')\right) \\
&= P\mathcal{F}_{k''}^{-1} \sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^2, k+k'=k''} e^{i(\omega(k)+\omega(k')-\omega(k+k'))\frac{t}{\epsilon}} ik_j'' \mathcal{F}_k v_n(t, k) \mathcal{F}_{k'} v_n(t, k')
\end{aligned}$$

qui converge au sens des distributions quand  $\epsilon \rightarrow 0$  vers

$$Q(v_n, v_n) = P\mathcal{F}_{k''}^{-1} \sum_{(k,k') \in S, k+k'=k''} ik_j'' \mathcal{F}_k v_n(t, k) \mathcal{F}_{k'} v_n(t, k')$$

La seconde étape de la preuve consiste à montrer que  $Q(v_n, v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Q(v, v)$  au sens des distributions. On montre ce résultat en remarquant que

$$\Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right) v_n \otimes \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right) v_n - \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right) v \otimes \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right) v = \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right) (v_n - v) \otimes \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right) (v_n + v).$$

Par conséquent, comme  $\Gamma$  conserve la norme dans tous les  $H^s$ , on a bien la convergence au sens des distributions.

La dernière étape consiste à utiliser que  $Q(v_n, v_n)$  converge au sens des distributions vers  $Q(v, v)$  et à regarder la limite de l'expression que nous avons obtenue précédemment. Comme  $v_n$  converge fortement vers  $v$  dans  $L^2([0, T], H^s)$  pour tout  $s$  dans  $[0, 1]$ , elle converge vers

$$Q(v, v) = P\mathcal{F}_{k''}^{-1} \sum_{(k,k') \in S, k+k'=k''} ik_j'' \mathcal{F}_k v(t, k) \mathcal{F}_{k'} v(t, k').$$

D'où l'expression présentée dans la propriété. ■

Les ondes contenues dans  $u^\epsilon$  possèdent un vecteur d'onde  $k$  et une pulsation  $\omega(k)$ , elles sont de la forme  $\exp(i(k \cdot r + i\omega(k)t)/\epsilon)$ . Deux vagues  $(k, \omega(k))$  et  $(k', \omega(k'))$  peuvent interagir pour former une nouvelle vague  $(k'', \omega(k''))$  via le terme de transport, non linéaire. Mais pour cela, les trois vagues doivent satisfaire la relation de résonance  $k + k' = k''$  et  $\omega(k) + \omega(k') = \omega(k'')$ .

### 1.3.2 Propriétés

On définit :

- $\Sigma = \{k \in \mathbb{Z}^2 \mid \omega(k) = 0\}$
- $\Pi$ , le projecteur sur les fréquences spatiales de pulsation associée nulle (on élimine les ondes).

$$\Pi u = \mathcal{F}^{-1} \mathbf{1}_\Sigma(k) \mathcal{F} u(k)$$

- $W = \{u \in L^2(\Omega) \mid Pu = u \text{ et } \Pi u = u\}$

On a alors  $W^\perp = \{u \in L^2(\Omega) \mid Pu = u \text{ et } \Pi u = 0\}$  dans  $\{u \in L^2 \mid Pu = u\}$  muni du produit scalaire  $L^2$  usuel.

**Propriété 4.**

- $u \in W \Leftrightarrow \mathcal{F}u$  a son support inclus dans  $\Sigma$ .  
 $u \in W^\perp \Leftrightarrow \mathcal{F}u$  a son support inclus dans  $\Sigma^c$ .
- $\Pi$  et  $1 - \Pi$  sont des projecteurs orthogonaux,  $W = \text{Ker}L = \text{Ker}(\Gamma - I)$ ,  
 $W^\perp = \text{Im}L = \text{Im}(\Gamma - I)$ .
- $\forall v \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$ ,  $\Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right)v \rightharpoonup \Pi v$  dans  $L^2([0, T], L^2(\Omega))$ .

**Démonstration :** On montre le dernier point en utilisant l'expression de  $\Gamma$  présentée en (16).  
 En effet, avec la formule d'inversion de Fourier et le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{t}{\epsilon}\right)v(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{i\omega(k)\frac{t}{\epsilon}} e^{ik \cdot x} \mathcal{F}v(k) \rightharpoonup \sum_{k \in \mathbb{Z}^2, \omega(k)=0} e^{ik \cdot x} \mathcal{F}v(k) \\ &= \sum_{k \in \Sigma} e^{ik \cdot x} \mathcal{F}v(k) \\ &= \Pi v \end{aligned}$$

■

**Propriété 5** (Limite faible de  $u^\epsilon$ ).

La limite faible quand  $\epsilon \rightarrow 0$  de la solution de Leray  $u^\epsilon$  ( $L^\infty L^2 \cap L^2 H^1$ ) est  $\Pi v$ , avec  $v$  la limite forte des  $\Gamma\left(\frac{-t}{\epsilon}\right)u^\epsilon$ . Elle est dans  $L^2([0, T], W)$ .

A l'aide de  $\Pi$ , on peut séparer  $v$  en 2 termes :  $\Pi v = \bar{u}$ , qui peut être interprété comme le flux moyen, et  $w = v - \bar{u}$ , qui forment les oscillations haute fréquence une fois le filtrage inversé. Essayons d'écrire des équations vérifiées par ces deux fonctions. Le terme qui empêche de les séparer dans (15) est  $Q(\bar{u} + w, \bar{u} + w)$ . Les oscillations rapides peuvent ainsi contribuer au flux moyen par leur interaction non linéaire, et inversement, le flux moyen peut agir sur les ondes rapides. On dispose de la propriété suivante :

**Propriété 6** (Equation des ondes et du flux moyen).

Soit  $u^\epsilon$  une suite de solutions de l'équation de Navier Stokes perturbée, bornées dans  $L^\infty([0, T], L^2) \cap L^2([0, T], H^1)$ . Soit  $v$  la limite forte de  $\Gamma\left(-\frac{t}{\epsilon}\right)u^\epsilon$  dans  $L^2([0, T], H^s)$  pour tout  $s < 1$ ,  $\bar{u} = \Pi v$  et  $w = (I - \Pi)v$ . On a alors :

$$\partial_t \bar{u} + \Pi Q(\bar{u}, \bar{u}) + \Pi Q(w, w) - \Delta \bar{u} = 0 \quad (18)$$

et

$$\partial_t w + (I - \Pi)(Q(w, w) + Q(\bar{u}, w) + Q(w, \bar{u})) - \Delta w = 0 \quad (19)$$

**Démonstration :** On obtient ces deux équations à partir de (15) en utilisant les projecteurs  $\Pi$  et  $I - \Pi$ . On peut écrire

$$Q(v, v) = Q(\bar{u}, \bar{u}) + Q(\bar{u}, w) + Q(w, \bar{u}) + Q(w, w)$$

Il reste à éliminer les termes nuls. On peut montrer à l'aide de l'expression de  $Q$  (17) que

$$(1 - \Pi)Q(\bar{u}, \bar{u}) = 0$$

et que

$$\Pi Q(\bar{u}, w) = \Pi Q(w, \bar{u}) = 0$$

■

Dans le cas général, les deux équations sont couplées. Mais dans le cas où les conditions initiales sont *bien préparées*, c'est-à-dire  $w = 0$ , il n'y a pas d'oscillation, et on peut donc découpler les deux équations (18) et (19).

**Propriété 7** (cas bien préparé).

On reprend les hypothèses de la propriété 6. La limite faible à extraction près de  $u^\epsilon$  est  $L^2([0, T], L^2(\Omega))$  est  $\bar{u}$ .

Si on suppose que la solution des équations (18) et (19) avec comme condition initiale  $u_0$  est unique, les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $u^\epsilon$  converge fortement vers  $\bar{u}$  dans  $L^2([0, T], L^2(\Omega))$ ,
2.  $v = \Pi v = \bar{u}$ ,
3.  $v(0) = \Pi v(0) \in W$ ,
4.  $\epsilon \partial_t u^\epsilon(0)$  converge vers 0 au sens des distributions,

et on a en plus

$$\partial_t \bar{u} + \Pi Q(\bar{u}, \bar{u}) - \Delta \bar{u} = 0 \tag{20}$$

La propriété d'unicité est vérifiée dans le cas de solutions fortes ou en deux dimensions d'espace, mais pas dans le cas général de solutions faibles à 3 dimensions d'espace.

### 1.3.3 Cas de la force de Coriolis

Prenons l'exemple de la force de Coriolis :  $L(u) = P(u \otimes B)$ , avec  $B$  le vecteur rotation. Pour bien comprendre l'équation, il faut d'abord déterminer l'expression de  $L$  et de  $\Gamma$  en Fourier. Ensuite, on détermine l'ensemble  $W$  et l'ensemble  $S$ , puis on étudie le cas bien préparé.

**Propriété 8** (Équation d'onde).

L'équation d'onde

$$\begin{cases} \partial_t u + P(u \times B) \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \tag{21}$$

admet une solution globale  $u(t)$  avec

$$\|u(t)\|_{H^s(\Omega)} = \|u(0)\|_{H^s(\Omega)} \tag{22}$$

si  $u(0) \in H^s$ .

On a en outre

$$\mathcal{F}u(t, k) = \exp(i\omega(k)t) \mathcal{F}u(0, k) \tag{23}$$

où  $\omega(k) = b_0 \frac{k_2}{|k|^2}$ .

On est bien dans le cas étudié précédemment. Par conséquent, toutes les propriétés de la section 3.2 restent vraies.

## 2 L'instabilité paramétrique subharmonique

Dans la partie physique de ce stage, j'ai pu étudier un phénomène très présent dans les milieux stratifiés, notamment l'océan : les ondes internes. Celles-ci sont générées par le relief sous-marin avec la marée, et jouent un rôle important dans la dynamique océanique. Par exemple, elles contribuent à la circulation océanique en apportant l'énergie nécessaire au mélange turbulent à l'origine de la remontée à l'équateur des eaux froides et denses venues du pôle.

Un des mécanismes proposés pour expliquer ce phénomène est l'instabilité paramétrique subharmonique, par laquelle une onde se décompose en deux ondes secondaires, de fréquences plus faibles. Je l'ai étudié de manière expérimentale dans le cas particulier d'un faisceau d'ondes localisé, et ce fut l'occasion de tester la validité de l'analyse, effectuée sur les ondes planes car beaucoup plus simple, dans ce cas particulier. Les méthodes employées étaient des analyses temps-fréquence et des filtrages en fréquence du champ de densité.

## 2.1 Introduction

La dynamique océanique et atmosphérique est extrêmement complexe et encore mal comprise. Elle fait intervenir des phénomènes se déroulant à des échelles très diverses. Les ondes internes, se propageant dans tout fluide stratifié, jouent un rôle essentiel dans le transfert d'énergie dans l'océan. Il est important de les étudier si on veut établir un bilan global d'énergie (Munk & Wunsch, 1998). Les ondes internes peuvent dissiper de l'énergie, par un processus de mélange lorsqu'elles déferlent par exemple. Ce processus est un bon candidat pour expliquer d'où provient l'énergie nécessaire au maintien de la circulation thermohaline, plus particulièrement celle nécessaire pour faire remonter l'eau salée et dense qui a plongé dans les régions polaires.

Un milieu est dit stratifié lorsqu'une ou plusieurs de ses propriétés thermodynamiques dépendent d'une coordonnée spatiale, l'altitude ou la profondeur par exemple. Des exemples de milieux stratifiés sont l'atmosphère ou l'océan, qui sont stratifiés en température et en température et salinité respectivement, donc en densité, *cf.* figure 1. On peut aussi considérer un milieu fluide à plusieurs phases : cocktails, étoiles, vinaigrette mal mélangée ou reposée.

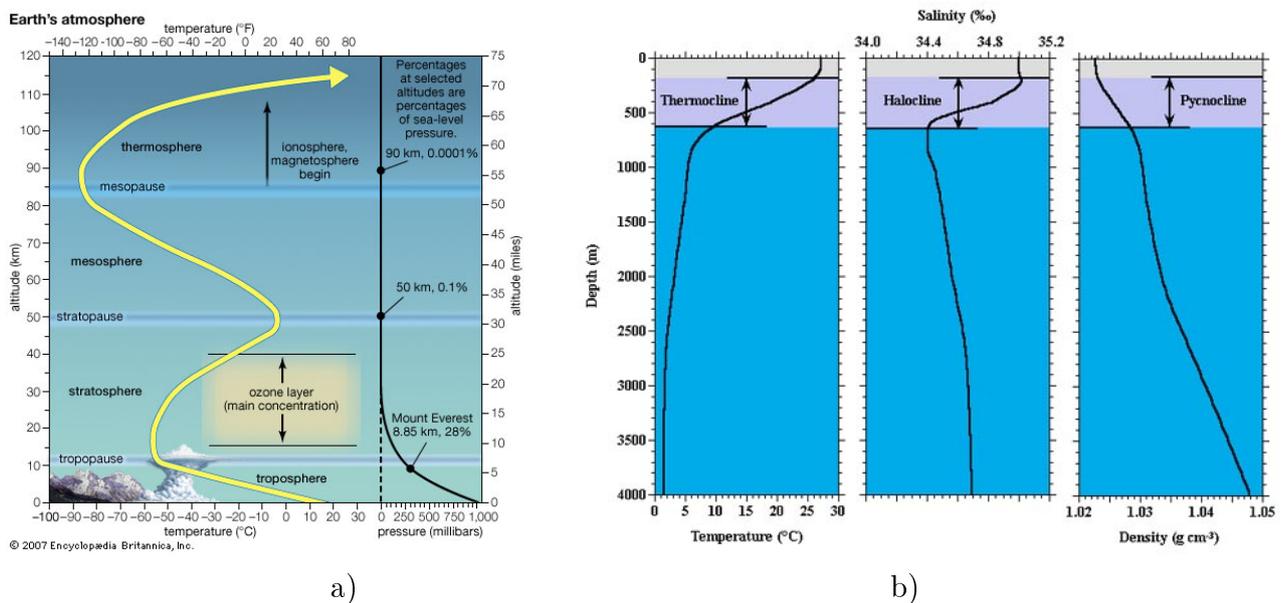


FIGURE 1 – a) *Stratification en pression et en température de l'atmosphère terrestre, b) stratification en température, salinité et densité de l'océan.*

Dans cette partie, nous nous familiariserons avec la physique des ondes internes, en trois étapes. Nous expliquerons d'abord le mécanisme physique sous-jacent, qui n'est autre que la poussée d'Archimède. Dans un second temps, nous mettrons en équation le phénomène menant aux ondes internes, en précisant les approximations effectuées. Enfin, nous exhiberons deux solutions à ces équations et mettrons en évidence certaines propriétés remarquables de celles-ci.

### 2.1.1 Origine des ondes internes

Imaginons une pièce chauffée. Au niveau du sol, l'air est plus frais et plus dense, alors qu'il est plus chaud et moins dense près du plafond : il y a une stratification en température de l'air de la pièce, qui génère aussi une stratification en densité. Plaçons-y un ballon d'hélium convenablement lesté. Si le ballon est au niveau du sol, la poussée d'Archimède

est plus forte que son poids, et il s'élève. Au contraire, près du plafond, son poids reprend le dessus. On assiste donc à un mouvement oscillatoire et à une stabilisation au niveau où poids et poussée d'Archimède se compensent. Leur différence agit comme une force de rappel, proportionnelle à l'écart à l'équilibre si la stratification est homogène (c'est-à-dire si le gradient de densité est constant) qui stabilise le ballon dans cette position.

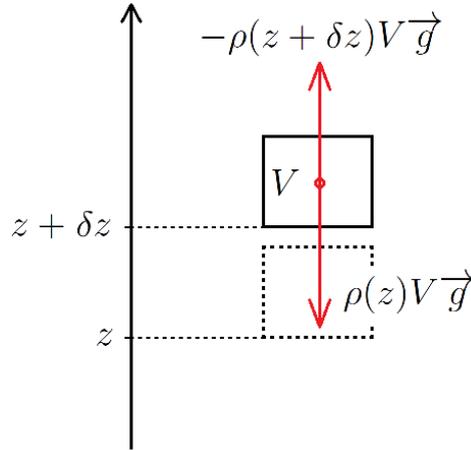


FIGURE 2 – Bilan des forces appliquées à un volume élémentaire de fluide  $V$ , déplacé de  $\delta z$  : il subit la poussée d'Archimède et son poids.

C'est cette force qui est à l'origine des ondes internes (cf. figure 2). Il est nécessaire de supposer que le mouvement est assez lent pour que l'expression de la force d'Archimède soit la même qu'en statique. On se place donc dans l'approximation quasistatique. Dans un milieu stratifié, de densité  $\rho(z)$  à l'altitude  $z$ , chaque particule fluide  $dV$  subit cette force de rappel

$$(\rho(z) - \rho(z + \delta z))dV\vec{g} \approx -\frac{\partial\rho}{\partial z}\delta z dV\vec{g} \quad (24)$$

lorsque la perturbation  $\delta z$  n'est pas trop importante, si on écrit  $\delta z$  l'écart de la particule fluide par rapport à la position d'équilibre. On obtient l'équation décrivant les ondes internes, lorsqu'on néglige les variations du champ de pression (hypothèse raisonnable dans l'approximation quasistatique)

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z} g \delta z, \quad (25)$$

ce qu'on peut réécrire, en définissant la fréquence de Brunt-Väisälä  $N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z}(z)}$

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} + N^2\delta z = 0. \quad (26)$$

Ce calcul simplifié permet de comprendre la force de rappel qui est à l'origine des ondes internes. La fréquence  $N$  sera un paramètre clé dans leur description.

A titre d'exemple, on peut donner quelques valeurs que prend  $N$  dans des milieux courants. On peut mesurer le profil de densité, de salinité et de température de l'océan à l'aide de sondes, et on trouve que  $N$  est de l'ordre de quelques cycles par heure (ou cph). Dans le cadre de mes expériences, la densité passe de 0,998 kg/L à la surface à 1,053 kg/L au fond de la cuve, pour une hauteur d'eau de 35 cm, soit  $N \approx 1$  rad/s, donc  $f \approx 0,17$  Hz.

Dans l'océan, les ondes internes peuvent apparaître au voisinage du relief sous-marin. Le fluide est en mouvement oscillatoire forcé à cause de la marée, ce qui entraîne une émission d'ondes. Une autre source d'ondes internes est le forçage par le vent, à la surface de l'océan cette fois-ci (Peacock, 2013).

### 2.1.2 Propriétés des ondes internes

Les ondes internes jouissent de propriétés particulières. La méthode usuelle pour les établir consiste à supposer l'écoulement *2C2D* (2 composantes et 2 dimensions : invariance par translation dans une direction, et mouvement dans le plan orthogonal à celle-ci) pour en introduire la fonction de courant. La seconde étape consiste à expliciter l'approximation de Boussinesq, qui mène aux équations les plus utilisées pour étudier la dynamique des ondes internes, qui restent cependant non-linéaire. Une troisième étape permet de se ramener à des équations linéaires approchées. C'est ce que nous allons montrer.

#### Fonction de courant

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \nu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0 \quad (28)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (29)$$

En régime stationnaire, si  $\vec{v} = \vec{0}$  en tout point du fluide, l'équation (3) devient la relation fondamentale de la statique des fluides

$$\vec{\nabla} p_0 = \rho_0 \vec{g}, \quad (30)$$

où l'indice 0 indique que les grandeurs vérifiant cette équation sont celles à l'équilibre. On utilise la continuité de la pression à l'interface avec l'atmosphère pour calculer le champ de pression.

On étudiera dorénavant l'écart à l'équilibre des différentes grandeurs :  $p$  sera remplacée par  $p' = p - p_0$  et  $\rho$  par  $\rho' = \rho - \rho_0$ . L'équation (3) devient

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p' + \nu \Delta \vec{v} + \rho' \vec{g}. \quad (31)$$

Utilisant l'incompressibilité (5) et le caractère 2C2D, si on se place dans le repère  $(O, x, y, z)$  orthonormé tel que  $\vec{v}$  ne dépende pas de  $y$ , on peut trouver  $\psi$  tel que  $\vec{v} = \text{rot} \psi$ , soit

$$\begin{cases} v_x = +\frac{\partial \psi}{\partial z} \\ v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}. \quad (32)$$

Pour simplifier les écritures, on introduit l'opérateur Jacobien

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (33)$$

Les équations (4) et (6) deviennent alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + J(\rho', \psi) + \frac{N^2 \rho}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + J \left( \frac{\partial \psi}{\partial z}, \psi \right) \right] = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \quad (35)$$

$$\rho \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} - J \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \psi \right) \right] = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \eta \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \rho' g . \quad (36)$$

On rappelle que  $N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho_0}{dz}}(z)$  .

**Approximation de Boussinesq** En général, les variations de  $\rho$  sont très faibles par rapport à sa valeur. Énonçons donc la condition de Boussinesq :

#### Approximation de Boussinesq.

On peut négliger les variations de densité par rapport à la densité moyenne, sauf si elles sont multipliées par la gravité.

On ne garde ainsi que la poussée d'Archimède, qui est à l'origine des oscillations. On remplace le cas échéant  $\rho$  par  $\bar{\rho}$ , la densité moyennée sur la profondeur.

En combinant les équations (10) et (11) pour éliminer la pression, on trouve

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + J(\rho', \psi) + \frac{N^2 \bar{\rho}}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 , \quad (37)$$

$$\bar{\rho} \left[ \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\Delta \psi, \psi) \right] = \eta \Delta^2 \psi + \frac{\partial \rho'}{\partial x} g \quad (38)$$

avec  $N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\rho_0}{dz}}$ .

Ces équations restent générales, car l'approximation de Boussinesq est très bien vérifiée expérimentalement. En outre, elle tient compte de la viscosité. En revanche, on ne connaît pas de solution exacte explicite à ces équations non linéaires.

**Approximation linéaire** On fait l'approximation linéaire en supposant le produit de deux perturbations négligeable par rapport à celles-ci. Le système précédent devient

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{N^2 \bar{\rho}}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \eta \Delta^2 \psi - \frac{\partial \rho'}{\partial x} g = 0 . \quad (40)$$

Remarquant qu'on peut éliminer  $\rho'$ , on écrit une unique équation sur  $\psi$

$$N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial t} . \quad (41)$$

On peut éventuellement négliger la viscosité, et obtenir une égalité de conservation de l'énergie.

Ces équations étant linéaires, on peut raisonner sur un champ complexe, et se ramener ensuite à sa partie réelle pour les solutions réelles. C'est cette méthode qui sera utilisée dans le paragraphe suivant, pour obtenir des solutions approchées : la première de type onde plane, pour laquelle on mettra en évidence la condition de propagation atypique des ondes internes, et la seconde dite de *Thomas-Stevenson*, qui est celle sur laquelle j'ai travaillé pendant ce stage.

**Solutions de type onde planes progressives monochromatiques** Cherchons une solution particulière à l'équation (41), de la forme

$$\psi = \psi_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) .$$

En substituant dans l'équation, on trouve la relation de dispersion pour des ondes planes (on rappelle que le mouvement est dans le plan  $(xOz)$ )

$$\omega^2 k^2 = N^2 k_x^2 \Leftrightarrow \omega = N |\sin \theta| , \quad (42)$$

où  $\theta$  est l'angle formé par le vecteur d'onde avec la verticale.

Par conséquent, et c'est là une des particularités des ondes internes, la fréquence des ondes influe sur la direction de propagation, mais pas sur la longueur d'onde. Pour une fréquence donnée, seules 4 directions sont possibles (*cf.* figure 3), et ce quelle que soit la norme du vecteur d'onde. On déduit de la relation de dispersion les vitesses de phase et de groupe, où  $\vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z$  :

$$\begin{cases} \vec{v}_\varphi = \frac{k_x \vec{k}}{k^2} \\ \vec{v}_g = \pm \frac{k_y}{k^2} \vec{e}_y \times \vec{k} . \end{cases} \quad (43)$$

On note une deuxième propriété originale des ondes internes : la vitesse de groupe et la vitesse de phase sont orthogonales,  $\vec{v}_\varphi \cdot \vec{v}_g = 0$ .

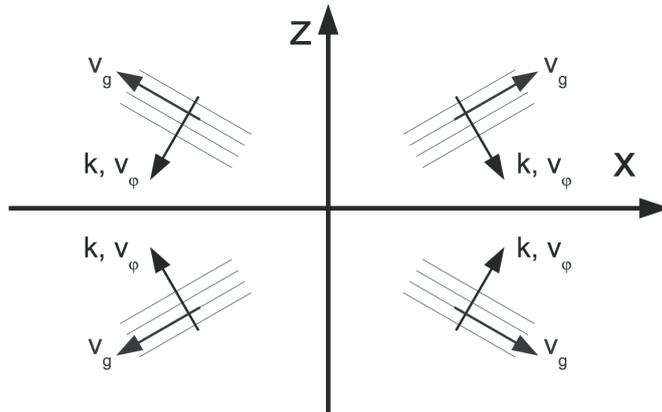


FIGURE 3 – Propagation en croix dans un fluide stratifié avec  $N$  constant lorsque la source est ponctuelle.

**Solutions de Thomas-Stevenson** Ces équations étant linéaires, une superposition d'ondes planes de même fréquence et se propageant dans la même direction est toujours solution, par linéarité. On écrit alors, si  $\vec{k} = k\vec{n}$

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_0^\infty \psi_k(\vec{r}, t) dk \quad (44)$$

$$= e^{i\omega t} \int_0^\infty \psi_{0,k} e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r}} dk . \quad (45)$$

En utilisant le repère  $(\xi O \eta)$  tel que  $\vec{k} = k\vec{e}_\eta$  et  $\vec{v}_g = v_g\vec{e}_\xi$ , on peut écrire

$$\psi(\xi, \eta, t) = e^{i\omega t} \int_0^\infty A(k) e^{-ik\eta} dk . \quad (46)$$

En prenant en compte les effets de la viscosité, Thomas et Stevenson ont permis à Hurley & Keady (1997) de proposer des solutions autosimilaires, générées par un objet oscillant, dont l'approximation en champ lointain sont celles que nous appellerons dans ce rapport les *solutions de Thomas-Stevenson* (pour  $\xi > 0$ ,  $u_0$  est l'amplitude complexe, et  $\alpha = (2N\cos\theta/\nu)^{1/3}$ ), illustrées figure 4.

$$u(\xi, \eta, t) = u_0 \left( \frac{\xi N^2 \sin\theta}{g} \right) \int_0^\infty k e^{-k^3} \exp \left( ik\alpha \frac{\eta}{\xi^{1/3}} - i\omega t \right) dk . \quad (47)$$

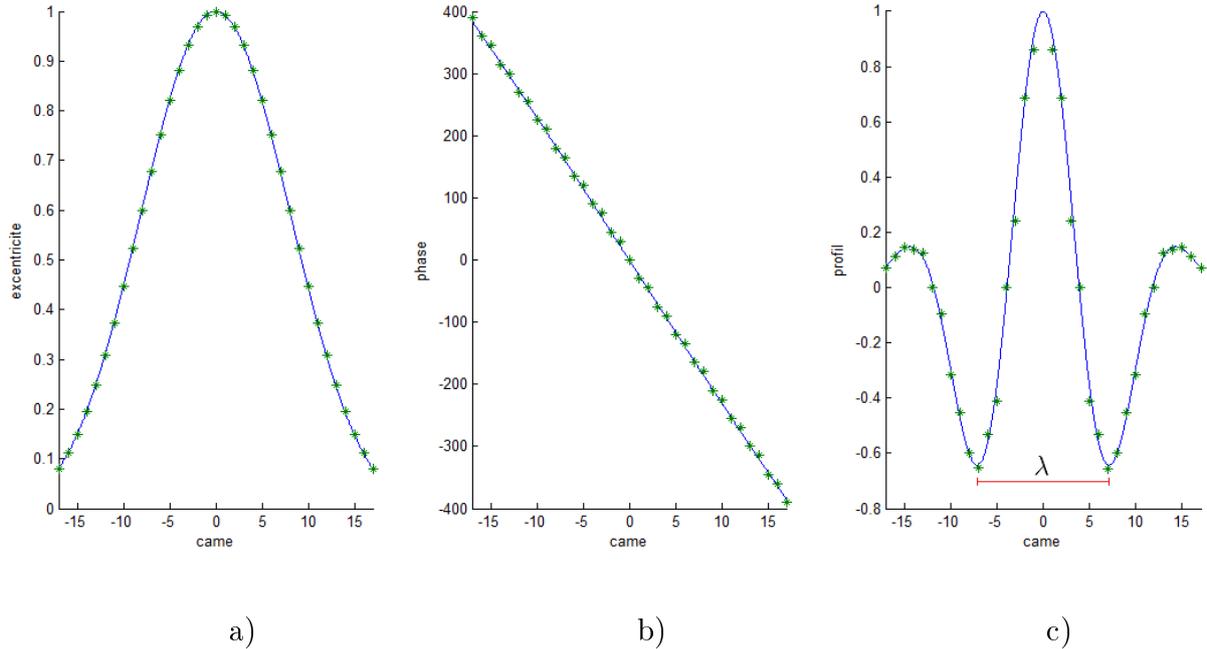


FIGURE 4 – a) Amplitude, b) phase, et c) profil de la partie réelle d'une solution de Thomas-Stevenson. En bleu : solution continue, et en vert : échantillonnage du profil pour la mise en oeuvre du profil sur le générateur d'ondes.  $\lambda$  est la distance entre les deux pics secondaires lorsque le pic principal a l'amplitude maximale, on appelle cette distance "longueur d'onde du Thomas Stevenson".

Ce profil a plusieurs avantages. D'une part, il est intéressant de l'étudier car c'est le faisceau généré par un objet de petite taille en oscillation verticale dans le fluide. Ensuite, la forme du faisceau généré dans l'océan par une topographie soumise à un forçage par la

marée est très proche des solutions de Thomas-Stevenson. C'est donc un exemple naturel de faisceau localisé. D'autres part, il est proche du profil que présente un faisceau d'ondes internes focalisé dans un cycle attracteur, qui a été étudié par Hélène Scolan *et al.* (2013) (voir la figure 5).

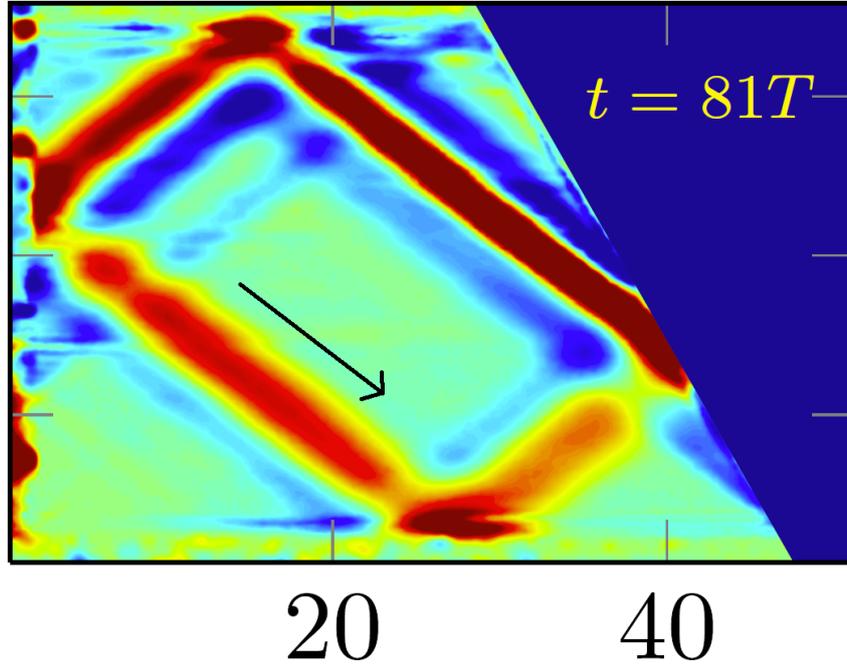


FIGURE 5 – *Attracteur d'ondes internes en présence d'une frontière pentue (à droite). Le générateur d'onde est situé à gauche de l'écran. L'onde est localisée sur un cycle limite car sa fréquence, et donc l'angle de la direction de propagation par rapport à l'horizontale, restent inchangées lors des réflexions successives. Le profil du bras focalisé (le plus intense, en haut à droite) est assez proche d'une solution de Thomas-Stevenson.*

### 2.1.3 Introduction à la PSI

Pour expliquer les mécanismes de la circulation thermohaline et le mélange vertical dans l'océan, il est communément admis que les ondes internes peuvent jouer un rôle majeur. Il existe plusieurs manières de transférer l'énergie vers les petites échelles grâce aux ondes internes (dissipation turbulente près des topographies sous un fort cisaillement, diffusion des ondes sur les topographies, interaction avec la pycnocline...). L'une d'entre elles est le processus d'interaction ondes-ondes sous forme de triades non linéaires résonantes, en particulier *l'instabilité paramétrique subharmonique*, ou *PSI* : une onde plane  $(\omega, \vec{k})$  peut transférer de l'énergie à deux ondes secondaires  $(\omega_1, \vec{k}_1)$  et  $(\omega_2, \vec{k}_2)$ , de fréquences plus faibles, vérifiant la condition de résonance :  $\omega_1 + \omega_2 = \omega$  et  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}$ .

En utilisant les équations (12) et (13), et en supposant que  $\rho'$  et  $\psi$  s'expriment comme la superposition de 3 ondes planes : l'onde principale  $(\omega_0, \vec{k}_0)$  et les ondes secondaires  $(\omega_1, \vec{k}_1)$  et  $(\omega_2, \vec{k}_2)$ , de faible amplitude, plus un terme correctif, il est possible de montrer que, si la condition de résonance ci-dessus est satisfaite et en considérant que l'amplitude des ondes varie lentement devant la durée d'une oscillation, les ondes secondaires peuvent être amplifiées : c'est l'instabilité paramétrique subharmonique (Bourget *et al.*, 2013).

Pour que l'instabilité puisse avoir lieu et que le taux de croissance soit positif, il faut que les vecteurs d'ondes aient leur extrémité sur la courbe bleue de la figure 6, en supposant leur origine à l'origine du repère. Certaines zones de la courbe correspondent à un taux de croissance plus important. Ce sont celles où se trouvent les vecteurs d'onde des ondes secondaires les plus favorisés. Expérimentalement, on n'observera pas d'onde secondaire dont le vecteur d'onde est hors de ces zones.

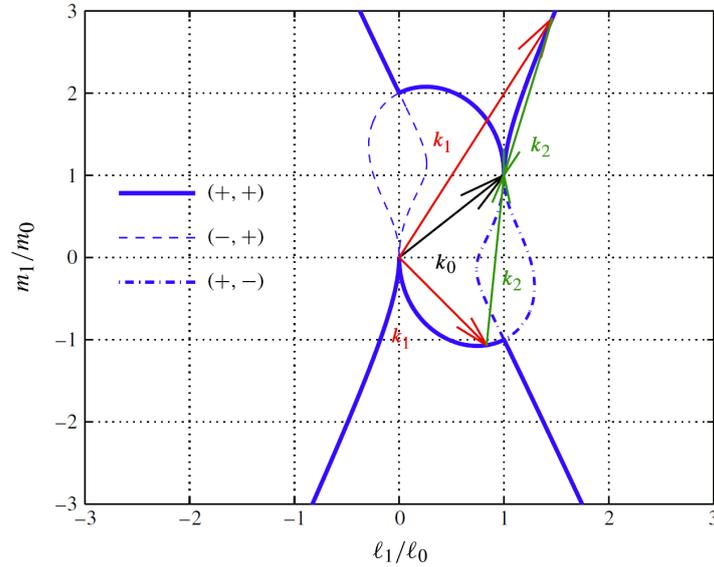


FIGURE 6 – Valeurs possibles des vecteurs d'ondes des ondes secondaires, normalisées par rapport à  $k_0$  (extrait de Bourget *et al.* (2013))

Pour mettre en évidence l'instabilité paramétrique subharmonique, on cherchera donc à déterminer les fréquences et vecteurs d'onde des ondes présentes dans le milieu. L'étape suivante sera de déterminer le taux de croissance de l'amplitude des ondes secondaires, pour voir s'il s'accorde bien avec la valeur théorique. L'analyse ayant été effectuée pour les ondes planes et l'expérience sur des solutions de Thomas-Stevenson, il se peut que des divergences apparaissent : il faudra voir s'il est possible de mettre en évidence un éventuel écart significatif à la théorie.

## 2.2 Présentation du dispositif et protocole expérimental

Une cuve de plexiglas parallélépipédique de 17cm de largeur et 160 cm de longueur est utilisée pour les expériences. Ses parois sont transparentes, et permettent donc de filmer un écran situé derrière la cuve (voir figure 7). Cet écran est éclairé uniformément pour limiter l'effet des variations d'éclairage.

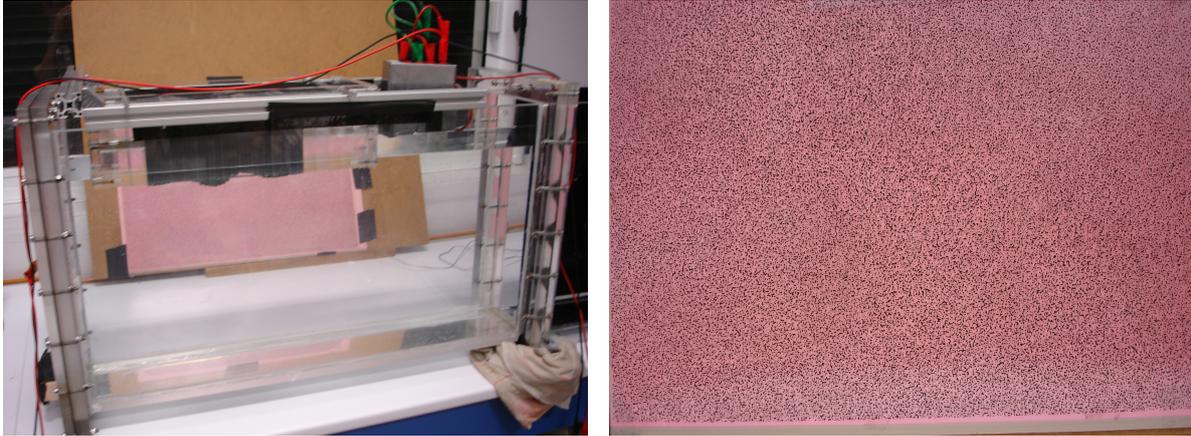


FIGURE 7 – a) La cuve d'expérience, remplie, avec le générateur d'ondes installé. On aperçoit l'écran derrière la cuve. b) vue rapprochée de l'écran.

La cuve est remplie d'eau salée présentant un fort gradient de concentration, qui est constant dans le cadre de nos expériences. Cette stratification linéaire en densité est obtenue par la méthode des deux bacs, décrite en annexe 4.1 (Gostiaux *et al.*, 2007). L'eau plus salée et plus dense est au fond, et l'eau douce est à la surface.

Les ondes internes sont créées à l'aide d'un générateur d'onde composé d'une superposition de plaques de 6mm d'épaisseur et mues par des cames réglables, fixées à un axe (voir figure 8). Celui-ci est entraîné à vitesse constante par un moteur contrôlé depuis un ordinateur. Son avantage principal est de pouvoir générer tout type de profil : onde plane, faisceau localisé (comme celui qu'on étudie ici, de type Thomas-Stevenson), mode 1... On peut également ajuster l'amplitude du motif et donc celles des ondes émises, bien qu'on

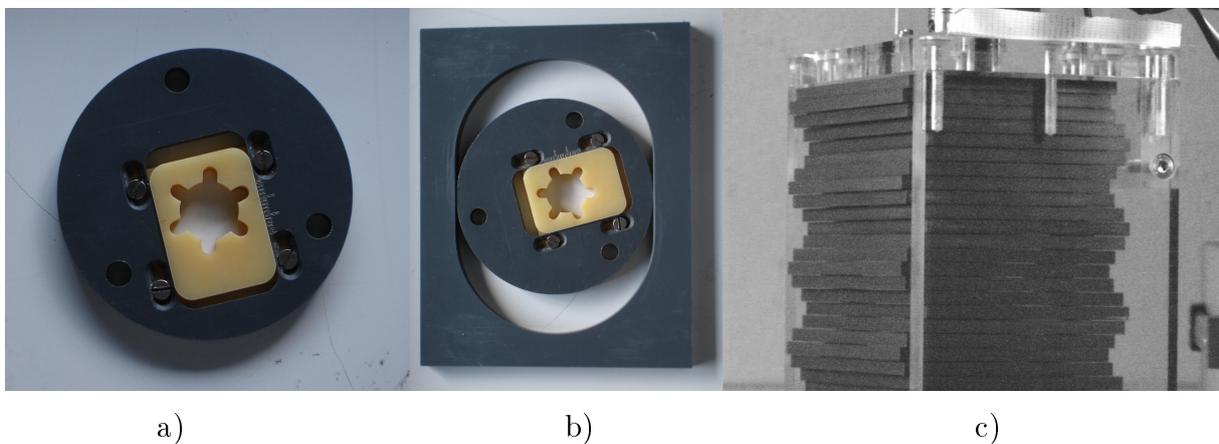


FIGURE 8 – Exemple a) d'une came et b) d'une plaque et de la came l'entraînant. c) Exemple de configuration du générateur d'onde.

n'ait pas forcément de relation de proportionnalité entre celles-ci : la transmission de l'excitation en ondes internes n'est pas parfaite, et dépend fortement de l'angle du faisceau émis avec l'axe. La transmission optimale est obtenue pour un générateur perpendiculaire au faisceau émis, mais en pratique il n'est pas facile de bien le placer sans perturber la stratification. Ce générateur est donc plongé horizontalement dans la couche supérieure de la cuve et mis en mouvement à un instant donné. On filme ensuite la cuve au rythme de 2 images par seconde environ à l'aide d'une caméra AVT Stingray munie d'un objectif de focale 25mm, fournissant une image en noir et blanc de  $1388 \times 1038$  pixels, pendant une durée pouvant aller de 15 minutes à 45 minutes.

On utilise la technique de strioscopie synthétique (synthetic Schlieren) pour mesurer les variations de densité par rapport à une image de référence, généralement en l'absence d'ondes. L'indice optique de l'eau varie en fonction de sa densité, et donc de sa concentration en sel. Par conséquent, une variation de densité induite par une onde interne influe sur la trajectoire des rayons lumineux au travers de la cuve (*cf.* figure 10), ce qu'on peut détecter en calculant les corrélations entre deux images (l'une de référence, l'autre à un instant  $t$  qu'on fait varier pour obtenir un film) de l'écran prise au travers de la cuve, à l'aide de l'algorithme *civx*, similaire à ceux utilisés en vélocimétrie par imagerie de particule (Fincham & Delerce, 2000). On comparera une image brute et l'image traitée sur la figure 9. Pour faciliter les calculs et obtenir une précision optimale, l'écran présente un motif aléatoire, une texture composée de nombreux petits points irréguliers d'une taille caractéristique de quelques millimètres, et séparés en général d'une distance d'environ 1mm.

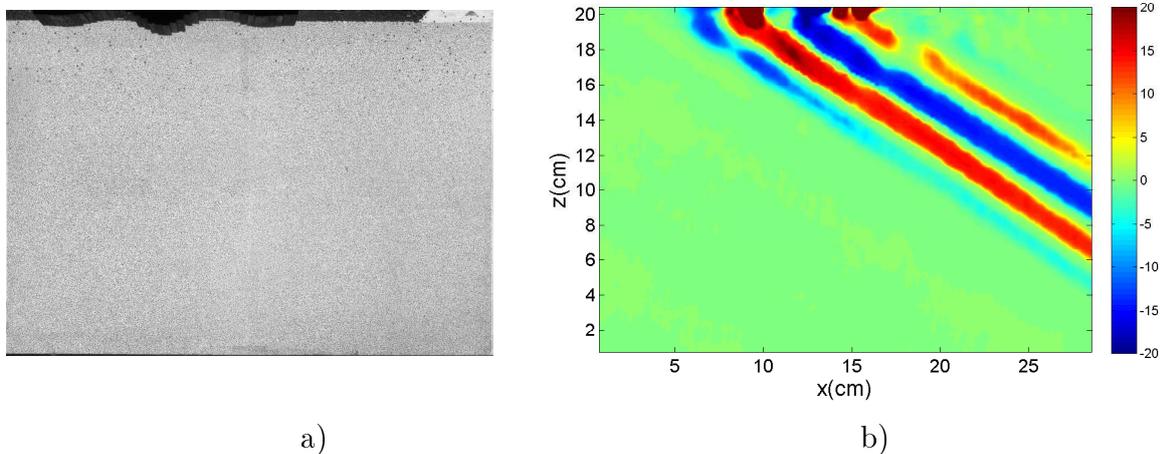


FIGURE 9 – a) Image brute, et b) image analysée par l'algorithme *civx*

On utilise pour traiter les images brutes l'algorithme *civx*, à l'aide de l'interface graphique *umat*, développée à Grenoble, qui fonctionne sur *matlab*. On effectue un calcul de corrélation en plusieurs passages, en affinant la grille à chaque nouvelle étape. Les calculs peuvent être très longs, quelques minutes par image pour un processeur usuel, sans prendre en compte les analyses ultérieures. Une série de mesures est ordinairement constituée de quelques milliers d'images. Dans ce stage, nous avons effectué une cinquantaine de séries de mesures différentes, dont trente ont été analysées, pour un total de 500Go de données. Avec un seul ordinateur, il aurait ainsi fallu près d'un an de calcul sans interruption pour finir cette tâche préliminaire.

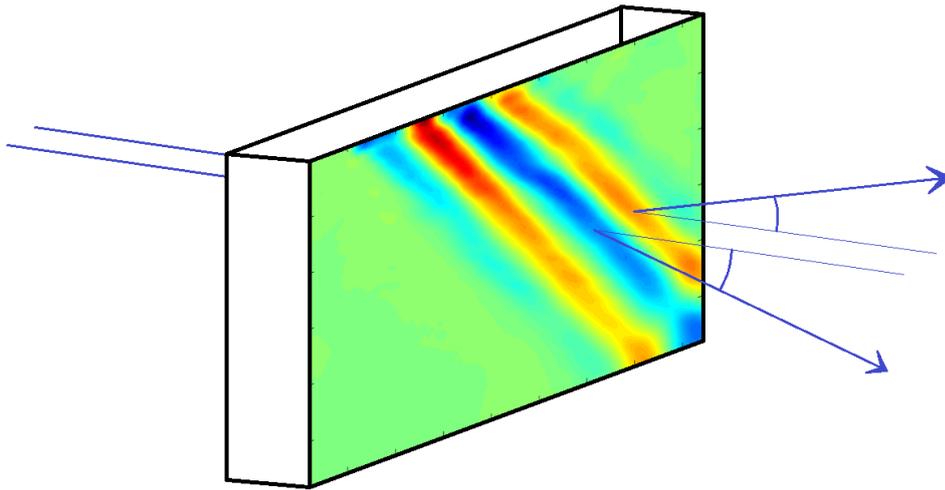


FIGURE 10 – *Schéma de principe de la technique de strioscopie synthétique : une variation de la densité entraîne une modification de la trajectoire des rayons lumineux passant au travers de la cuve.*

Pour satisfaire ce besoin d'une grande puissance de calcul, j'ai eu le privilège de pouvoir utiliser le pôle scientifique de modélisation numérique (PSMN) de l'ENS Lyon. Ce méso-centre de calcul peut effectuer de nombreux calculs simultanément. Il rassemble au total près de 5500 coeurs. En moyenne, parmi les tâches que je soumettais, quelques dizaines s'effectuaient en parallèle. Cela a permis de finir l'analyse des résultats en environ une semaine.

Le travail relatif à une expérience se divisait en 4 étapes :

1. Une phase de préparation : préparation des cuves pour la méthode des deux bacs, puis remplissage de la cuve (4h) et montage du générateur d'onde. Ensuite, étalonnage de la sonde conductimétrique avec des solutions de différentes salinités et de densité mesurée avec un densimètre manuel Anton-Paar DMA35, puis tracé de la densité en fonction de la profondeur.
2. Expérience : enregistrement des images de la cuve pendant 15 à 45 minutes. Généralement, un remplissage est utilisé pour 2 jours d'expériences, avec en moyenne 5 expériences par jour.
3. Traitement des images par l'algorithme civx sur le PSMN
4. Récupération des données, puis analyse des résultats.

## 2.3 Résultats

Les expériences menées couvrent 3 profils différents du générateur (On appelle "longueur d'onde du Thomas-Stevenson" la distance entre les deux pics secondaires lorsque le centre du motif atteint son amplitude maximale. *cf.* figure 4) :

- un Thomas-Stevenson de longueur d'onde 4 cm et d'amplitude maximale 10 mm
- un Thomas-Stevenson de longueur d'onde 10 cm et d'amplitude maximale 10 mm
- un Thomas-Stevenson de longueur d'onde 10 cm et d'amplitude maximale 5 mm

L'objectif de cette partie est d'introduire des méthodes permettant de mettre en évidence l'instabilité paramétrique subharmonique ou, au contraire, son absence, et d'extraire des informations pertinentes sur l'instabilité le cas échéant.

### 2.3.1 Analyse temps-fréquence

Pour savoir si l'instabilité a lieu, la première analyse à effectuer est un diagramme temps-fréquence. Sur ce diagramme figure la valeur de la transformée de Fourier du champ de gradient de densité ( $\partial_z \rho'$  ou  $\partial_x \rho'$ ) en un temps donné et pour une fréquence donnée, moyenné sur l'intégralité de l'image. C'est la transformée de Fourier à temps court du champ. La formule permettant de la calculer est celle-ci :

$$S(\omega, t, \vec{r}) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} ds \rho(\vec{r}, s) e^{i\omega s} h(t-s) \right|^2 \right\rangle$$

où  $h$  est la fenêtre utilisée pour fixer l'intervalle sur lequel effectuer la transformée de Fourier. Plus elle est étroite, plus la résolution temporelle est bonne, mais la résolution en fréquence devient moins bonne. Dans les diagrammes temps-fréquence ci-dessous, on choisit une largeur de fenêtre d'environ  $100T_0$ , où  $T_0$  est la période des oscillations. Le bibliothèque utilisée pour cette analyse est celle de P. Flandrin (1998). Dans les diagrammes ci-dessous, on trace toujours  $\log_{10} S^2$ .

Dans la figure 11 a), on observe une seule bande, pour  $\omega/N = 0,72$ . On peut conclure à l'absence de PSI, car aucune autre fréquence que celle de l'onde induite par le générateur, appelée onde primaire, n'est présente, à l'exception de la composante à fréquence nulle, qui est un flux moyen engendré par le générateur. En revanche, pour les figure 11 b) et c), plusieurs autres fréquences, celles d'ondes dites secondaires, sont présentes. Seules celles avec  $\omega/N < 1$  ont une réalité physique, les autres sont des artefacts de calcul ou des ondes parasites au voisinage du moteur. En effet, la relation de dispersion des ondes internes  $\omega/N = \sin \theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre la direction de propagation et l'horizontale, implique qu'une onde ne peut se propager que si  $\omega/N < 1$ .

Pour l'expérience 1, on a

$$\frac{\omega_0}{N} = 0.72 \pm 0.03 .$$

Pour l'expérience 2, on a

$$\begin{cases} \frac{\omega_1}{N} = 0.30 \pm 0.01 \\ \frac{\omega_2}{N} = 0.50 \pm 0.01 \\ \frac{\omega_2}{N} + \frac{\omega_1}{N} = 0.80 \pm 0.02 \\ \frac{\omega_0}{N} = 0.81 \pm 0.01 . \end{cases}$$

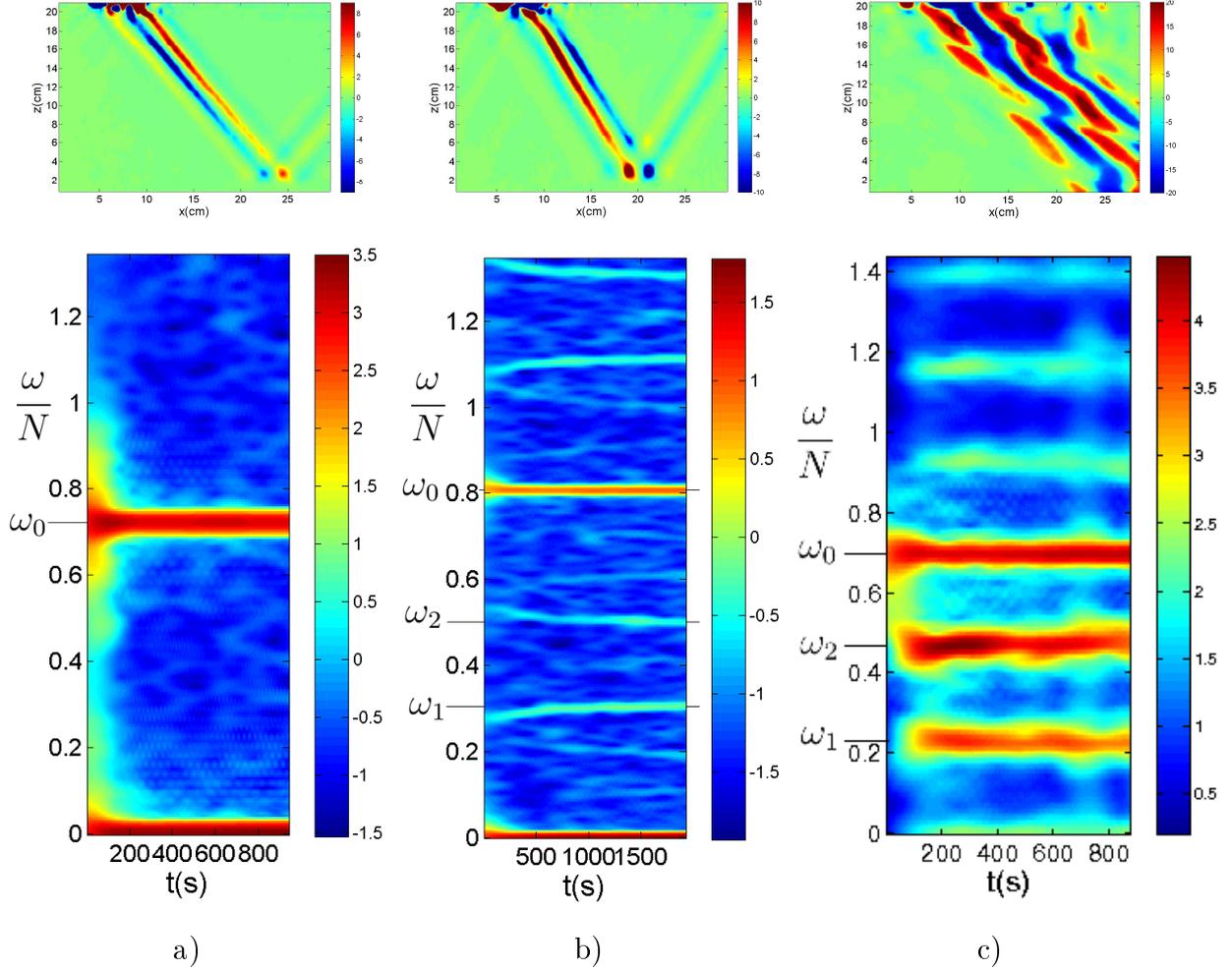


FIGURE 11 – Gradient horizontal de densité à  $50 T_0$  et diagrammes temps-fréquence des expériences. a) expérience 1, b) expérience 2, c) expérience 3.

Pour l'expérience 3, on a

$$\begin{cases} \frac{\omega_1}{N} = 0.23 \pm 0.03 \\ \frac{\omega_2}{N} = 0.47 \pm 0.03 \\ \frac{\omega_2}{N} + \frac{\omega_1}{N} = 0.70 \pm 0.05 \\ \frac{\omega_0}{N} = 0.70 \pm 0.03 . \end{cases}$$

On remarque que dans les deux cas, les ondes secondaires ont des fréquences  $f_1$  et  $f_2$  telles que  $f_1 + f_2 = f$ , où  $f$  est la fréquence de l'onde primaire.

### 2.3.2 Transformée de Hilbert

Dans un second temps, une fois isolées les fréquences des ondes intéressantes, il est souhaitable de les isoler des autres pour visualiser leur localisation spatiale, leur amplitude, leur phase, et leur vecteur d'onde. Pour ce faire, on utilise la transformée de Hilbert, qui permet de récupérer la phase et l'amplitude d'une des composantes sinusoïdales d'un signal quelconque, avec un éventuel filtrage temporel (Mercier *et al.*, 2008). La transformée de Hilbert de  $\cos(\omega t)$  est  $\exp(i\omega t)$ . On filtre la transformée de Fourier autour de la fréquence

désirée (et, si besoin aussi, en fonction de la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}$ ) avant de revenir en temporel. Ainsi, voilà les images obtenues en filtrant les ondes autour des fréquences des ondes principales et secondaires pour l'expérience 2 :

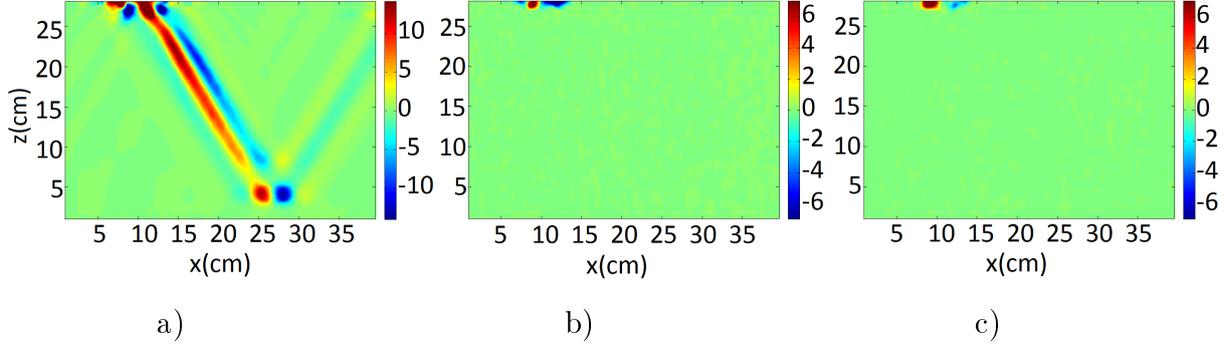


FIGURE 12 – *Expérience 2 : champ filtré pour a)  $\frac{\omega_0}{N} = 0.81$  b)  $\frac{\omega_1}{N} = 0.30$  c)  $\frac{\omega_2}{N} = 0.50$ .*

Sur la figure 12, l'amplitude des ondes n'est non nulle que près du générateur. Il ne s'agit donc pas d'une instabilité paramétrique subharmonique. Refaisons l'analyse temps-fréquence loin du générateur, sur le faisceau principal. On obtient le diagramme temps-fréquence suivant (figure 13) :

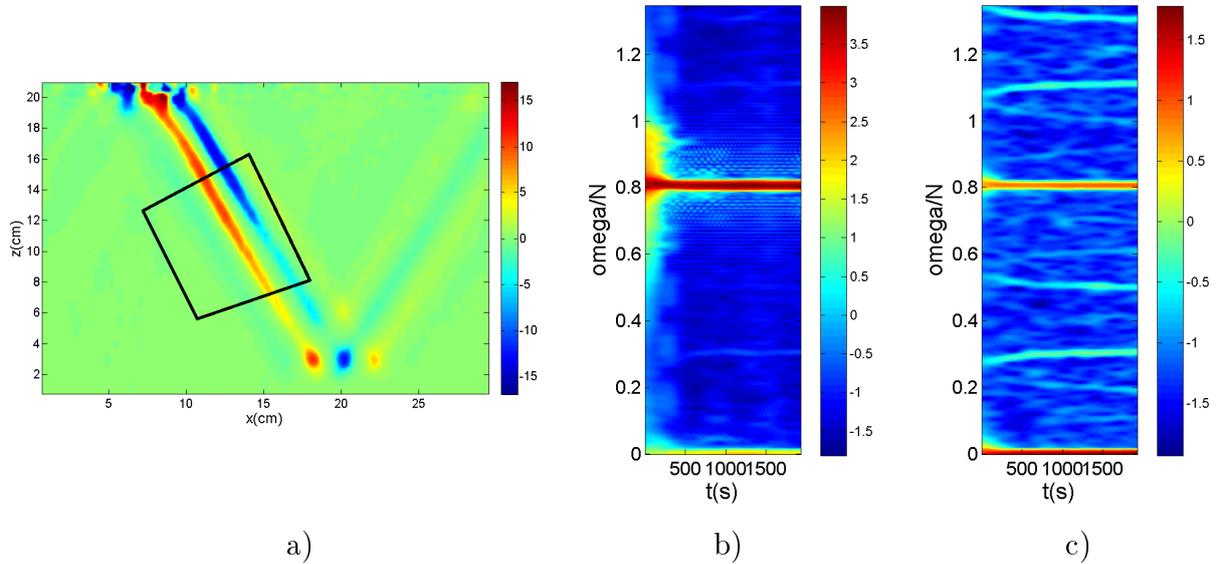
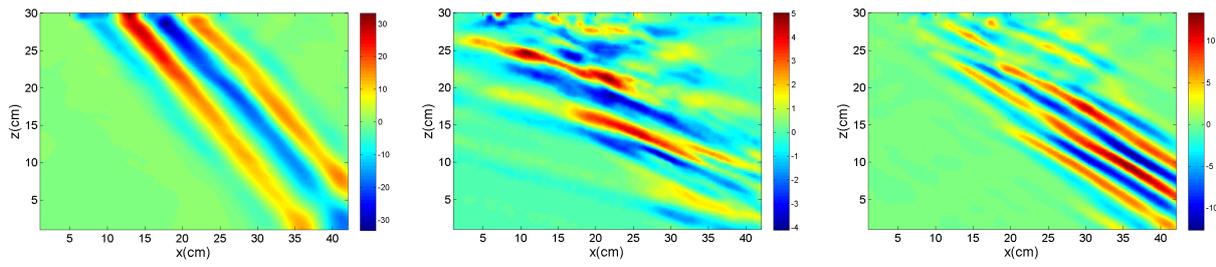


FIGURE 13 – *Expérience 2 : a) zone sur laquelle on effectue la transformée temps-fréquence, et b) diagramme obtenu. À titre de comparaison, c) est le temps-fréquence sur l'intégralité de l'image.*

On voit que l'amplitude des raies secondaires est fortement diminuée : elles n'apparaissent plus, et ne peuvent être séparées du bruit dans ce diagramme.

Cette analyse montre que le générateur peut engendrer des parasites qui ne se propagent pas avec le faisceau. Il convient donc d'effectuer les analyses loin du générateur, pour que les ondes parasite ne soient pas prises en compte.



a) b) c)  
 FIGURE 14 – *Expérience 3 : champ filtré pour a)  $\frac{\omega_0}{N} = 0,70$  b)  $\frac{\omega_1}{N} = 0,23$  c)  $\frac{\omega_2}{N} = 0,47$*

Sur la figure 14, on observe que les ondes secondaires sont bien présentes dans toute la cuve. Les ondes à  $\frac{\omega}{N} = 0,23$  ont une vitesse de groupe dirigée vers le coin supérieur gauche de l'image, alors que les ondes à  $\frac{\omega}{N} = 0,47$  ont leur vitesse de groupe dirigée vers le coin inférieur droit, comme le faisceau principal. Les amplitudes des trois ondes sont comparables, ce qui est visible sur l'image du champ de vitesse : on ne voit pas qu'un seul faisceau, mais un motif plus complexe.

La vérification suivante est celle de la condition de résonance : on a montré que  $f_1 + f_2 = f$ , a-t-on  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}$ ? Pour ce faire, on utilise les champs filtrés, en récupérant la phase de l'onde, qui permet d'extraire les composantes horizontales et verticales du vecteur d'onde en effectuant une régression linéaire sur un profil de phase horizontal ou vertical : la phase vaut  $\omega t - k_x x - k_z z$ , donc la pente en  $x$  est  $-k_x$  et la pente en  $z$  est  $-k_z$ ). On trouve ainsi les vecteurs d'ondes suivants :

$$\begin{aligned} k_{x,0} &= 62(1) \text{ m}^{-1} & k_{x,1} &= -36(1) \text{ m}^{-1} & k_{x,2} &= 88(1) \text{ m}^{-1} & k_{x,1} + k_{x,2} &= 52(2) \text{ m}^{-1} \\ k_{z,0} &= 56(1) \text{ m}^{-1} & k_{z,1} &= -112(2) \text{ m}^{-1} & k_{z,2} &= 145(1) \text{ m}^{-1} & k_{z,1} + k_{z,2} &= 33(2) \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

La différence entre  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2$  et  $\vec{k}_0$  est de 30% de la norme de  $\vec{k}_0$ , bien supérieure aux valeurs d'incertitudes obtenues. En réalité, on n'a tenu compte que des aspects statistiques de l'incertitude, ce qui a conduit à la sous-estimer. On voit qu'il est très difficile de mesurer avec précision le vecteur d'onde  $\vec{k}_1$ , car l'onde associée est très peu régulière. Il n'est pas aisé de déterminer une bonne valeur de l'incertitude, mais on peut l'estimer à environ  $30 \text{ m}^{-1}$ . Avec cette valeur de l'incertitude, on trouve que la condition de résonance sur les vecteurs d'ondes est vérifiée. Sur la figure 15, on a placé les vecteurs  $\vec{k}_0$ ,  $\vec{k}_2$  et  $\vec{k}_2$  et l'imprécision sur leur mesure. La plus grande est celle de  $\vec{k}_1$ .

Dans la partie suivante, on poursuivra l'analyse de cette expérience, pour voir notamment l'établissement de l'instabilité.

### 2.3.3 Evolution temporelle

Pour mettre en évidence l'instabilité paramétrique subharmonique, qui se caractérise par l'apparition d'autres fréquences, on peut tracer une série temporelle en un point du faisceau, c'est-à-dire le champ en fonction du temps en un point. En l'absence de PSI, une seule fréquence est présente et le signal n'est pas modulé. En revanche, si il y a de la PSI, on observera une modulation du signal (*cf.* figure 16)

On voit bien que sur les deux premières séries temporelles, il n'y a pas de modulation, hormis la modulation en amplitude initiale. En revanche, la dernière série temporelle ne présente pas la régularité d'un cosinus : d'autres fréquences sont présentes, bien qu'on ne puisse pas déterminer lesquelles. Cette méthode de diagnostic a l'avantage d'être rapide, mais peu précise et sujette à une grande incertitude. Pour expliquer la modulation en

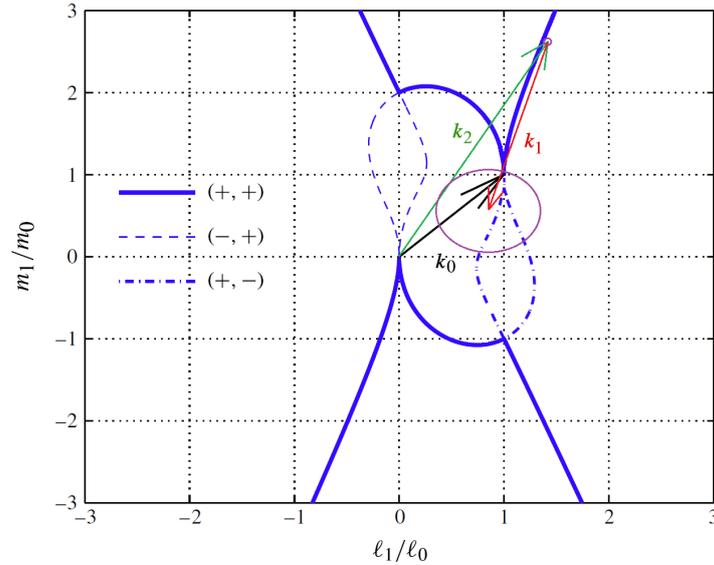


FIGURE 15 – Vecteurs d’ondes avec les barres d’incertitude. On remarque que la condition de résonance  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_0$  est vérifiée en tenant compte de l’incertitude sur la mesure de  $\vec{k}_1$ , et que les vecteurs ont bien leurs extrémités sur la courbe bleue.

amplitude, qui est une observation qu’on retrouve sur toutes les mesures effectuées, on peut avancer l’hypothèse qu’il s’agit d’un régime transitoire dû à l’allumage du moteur, et qu’il engendre une sorte de burst avant que l’onde n’atteigne un régime stationnaire.

Comment visualiser l’évolution temporelle de l’amplitude des ondes pour décrire l’apparition de l’instabilité ? Une méthode efficace est d’utiliser les diagrammes temps-fréquence pour tracer l’évolution temporelle des coefficients de Fourier des fréquences intéressantes. Cette méthode a bien sûr un inconvénient majeur, mais difficilement contournable : si on a cherché à avoir une bonne résolution en fréquence, la résolution spatiale est mauvaise et par conséquent le taux de croissance est inexact. Pour pallier à ce problème, on effectue une première analyse temps-fréquence très résolue en fréquence (et peu en temps) pour déterminer les fréquences à étudier. Dans un second temps, on calcule le diagramme temps-fréquence avec une bonne résolution temporelle pour avoir une meilleure valeur du temps fréquence. On trouve donc la figure 17, décrivant l’évolution temporelle des coefficients de Fourier pour les deux fréquences présentes :

Pour les fréquences secondaires, on observe une phase initiale de croissance. Lors de cette phase, le logarithme du coefficient de Fourier est une fonction affine du temps, ce qui correspond à l’évolution prévue par la théorie, même si le calcul portait sur les ondes planes. On peut donc en déduire le taux de croissance et le comparer aux valeurs prévues par la théorie : en effet, si la pente de la courbe est  $a$ , le taux de croissance est  $\sigma = a \frac{\ln(10)}{2}$ . En effectuant une régression linéaire sur la phase de croissance, on trouve un taux de  $0,24 \text{ s}^{-1}$  pour le premier et de  $0,21 \text{ s}^{-1}$ . Ensuite, le coefficient de Fourier atteint une valeur maximale. Les ondes secondaires ont pompé trop d’énergie au faisceau principal, et décroissent. Ensuite, les amplitudes semblent tendre vers une valeur limite, ce qui n’est pas encore expliqué. Pour minimiser le rapport signal/bruit, on a sommé les coefficients de Fourier sur une certaine plage de fréquences  $[f-df, f+df]$ , et les valeurs obtenues permettent d’avoir une idée de l’évolution temporelle des coefficients de Fourier, et seront à comparer à la théorie des ondes planes pour une longueur d’onde proche.

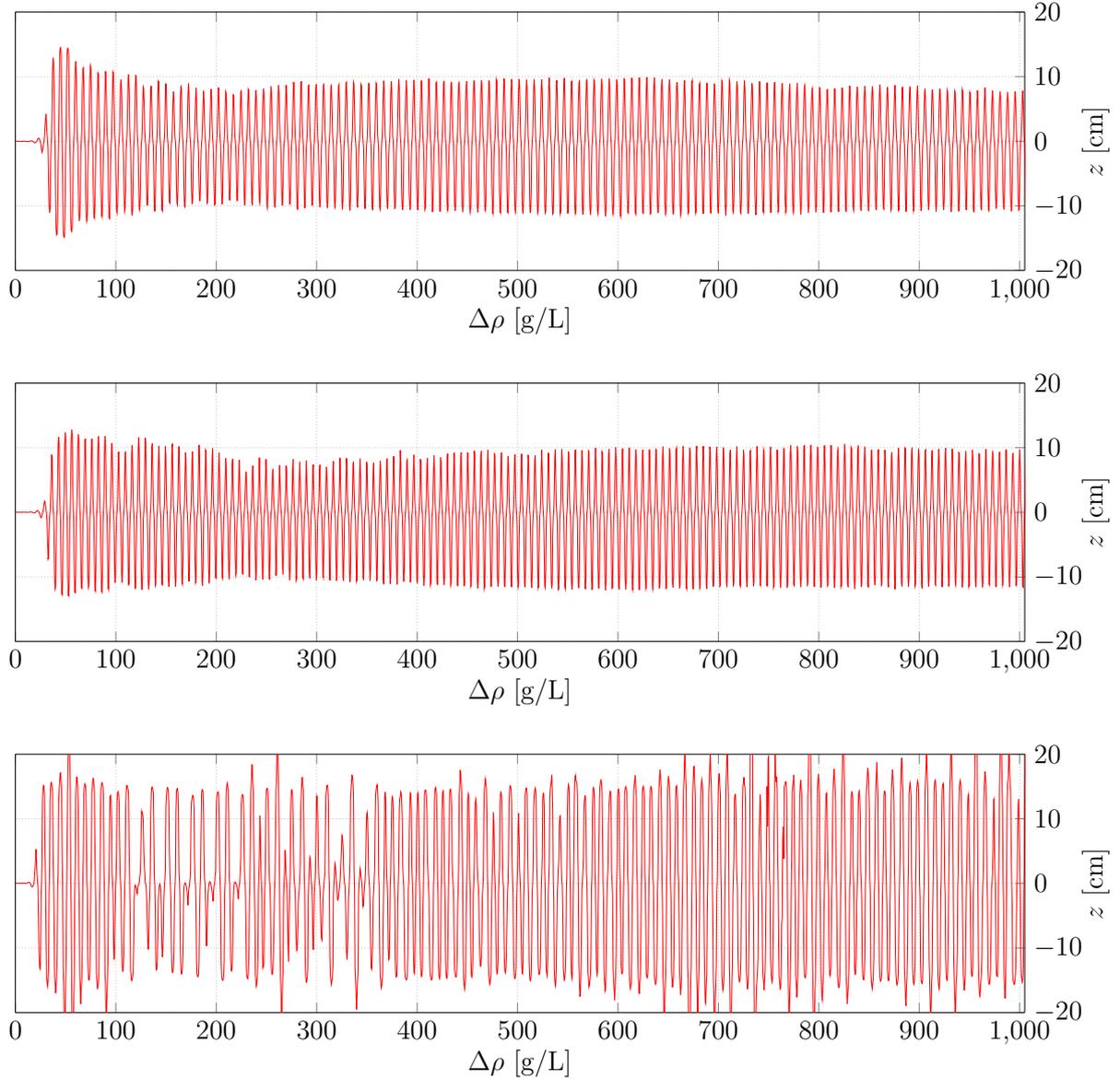
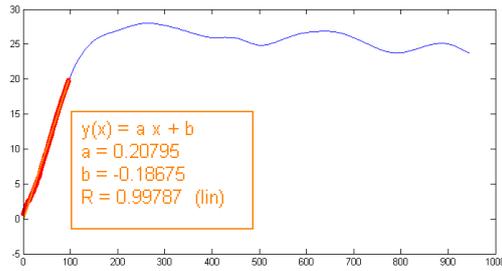


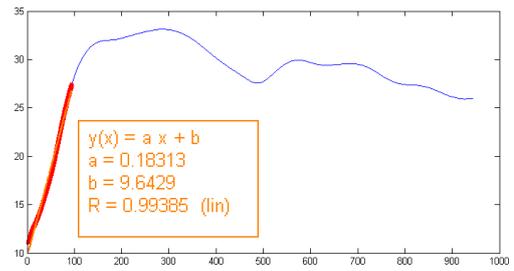
FIGURE 16 – *série temporelle sur le faisceau pour les expériences 1, 2 et 3*

## 2.4 Discussion

Les manipulations effectuées au cours de ce stage ont permis d'obtenir des résultats nouveaux. Elles s'inscrivent dans le projet de recherche de l'équipe : des expériences préliminaires similaires, menées par Baptiste Bourget, avaient conclu à l'absence d'instabilité. En faisant varier les paramètres, notamment l'amplitude et la "longueur d'onde" du Thomas-Stevenson, on a montré qu'il y avait bel et bien une instabilité, et que son apparition dépend fortement de ces paramètres. L'utilisation de la transformée de Hilbert a permis d'étudier les caractéristiques de cette instabilité. En vérifiant les propriétés de celle-ci, on a pu en conclure qu'il s'agissait bien de l'instabilité paramétrique subharmonique, et que certaines de ses propriétés démontrées pour des ondes planes semblent rester valables dans le cas d'une solution de Thomas-Stevenson, notamment la condition de résonance : si l'onde principale  $(\omega_0, \vec{k}_0)$  transfère de l'énergie à deux ondes secondaires



a)



b)

FIGURE 17 – *Expérience 3, évolution temporelle des coefficients de Fourier des fréquences*  
 a)  $\frac{\omega_1}{N} = 0.23$  b)  $\frac{\omega_2}{N} = 0.47$ . En abscisse, le temps en secondes, et en ordonnée la valeur moyenne de  $\log_{10} S^2$ .

Numéro	amplitude	longueur d'onde	$\frac{\omega}{N}$	PSI ?
1	1 cm	3,6 cm	0.80	-
2	1 cm	3,6 cm	0.72	-
3	1 cm	3,6 cm	0.86	-
4	1 cm	3,6 cm	0.81	-
5	1 cm	9 cm	0.78	oui
6	1 cm	9 cm	0.70	oui
7	1 cm	9 cm	0.86	oui
8	1 cm	9 cm	0.61	oui
9	1 cm	9 cm	0.57	oui
10	1 cm	9 cm	0.50	-
11	1 cm	9 cm	0.58	-
12	1 cm	9 cm	0.56	-
13	1 cm	9 cm	0.60	oui
14	1 cm	9 cm	0.55	oui
15	1 cm	9 cm	0.56	oui
16	1 cm	9 cm	0.55	-
17	1 cm	9 cm	0.59	-
18	1 cm	9 cm	0.61	-
19	1 cm	9 cm	0.63	oui
20	1 cm	9 cm	0.62	oui
21	1 cm	9 cm	0.64	oui
22	1 cm	9 cm	0.65	oui
23	1 cm	9 cm	0.72	oui

FIGURE 18 – *Tableau récapitulatif des expériences sur lesquelles ont été faites l'analyse temps-fréquence.*

$(\omega_1, \vec{k}_1)$  et  $(\omega_2, \vec{k}_2)$ , alors on a

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = \omega_0 \\ \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_0 \end{cases} .$$

On a en outre mis en évidence l'établissement temporel de cette instabilité.

Ce travail mène à s'interroger sur les points suivants :

- Dans une étude ultérieure, on pourrait étudier le comportement au voisinage du seuil d'apparition de l'instabilité, notamment l'ordre de la transition.
- On pourrait tracer l'amplitude des ondes secondaires pour  $t \rightarrow +\infty$  en fonction de  $\omega/N$ , pour mieux comprendre le régime établi, qui n'est pas encore bien compris pour le moment.
- Il serait pertinent de vérifier le profil du faisceau en l'absence d'instabilité pour le comparer à une solution de Thomas-Stevenson.
- D'autres expériences ont été effectuées pour une amplitude de 0,5 cm et une longueur d'onde de 9 cm, mais elles n'ont pas été analysées. Une étude de celles ci pourrait apporter des informations supplémentaires.

Par ailleurs, j'ai pu observer que dans ce dernier cas (figure 19), la PSI n'apparaissait pas dans la cuve, mais près de la réflexion. Cela laisse penser que l'amplitude des ondes n'était pas suffisant pour que l'instabilité apparaisse dans le corps du faisceau, mais que les amplitudes additionnées de l'onde incidente et réfléchie permettent de franchir le seuil. Il semble par ailleurs que certaines directions soient privilégiées à un instant donné, mais que celles-ci alternent au fil du temps : les ondes seront tantôt plus intenses quand elles se propagent vers la gauche, et tantôt plus intenses quand elles se propagent vers la droite. Il n'a pas encore pu être établi si c'est un phénomène transitoire ou persistant.

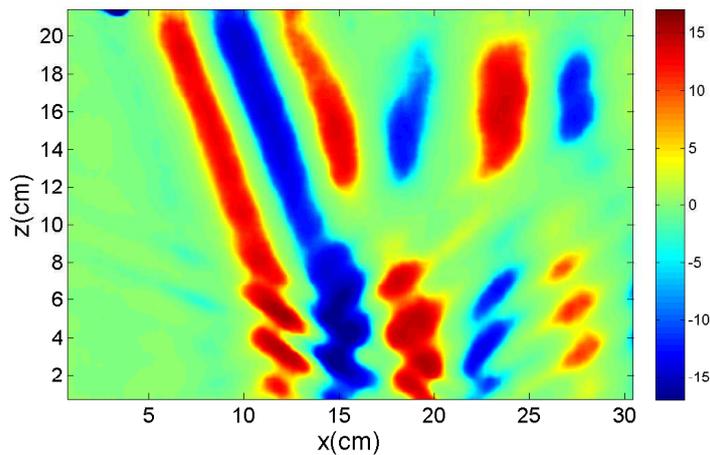


FIGURE 19 – *Apparition de l'instabilité à la réflexion*

### 3 Conclusion

Durant ce stage, j'ai pu appréhender des points de vue divers sur l'hydrodynamique : celui des mathématiciens comme celui des physiciens. J'ai pu comparer les problèmes qui se posaient à chacun d'eux, ainsi que les enjeux et les méthodes utilisées pour les résoudre.

J'ai beaucoup apprécié le côté expérimental de la partie physique, qui m'avait assez manqué pendant l'année. Les aléas inhérents à l'expérimentation encouragent le questionnement, la réflexion, la discussion avec les autres membres de l'équipe pour résoudre les problèmes techniques ou informatiques qui se posent. Ce fut souvent l'occasion de contacts et de discussions très enrichissantes, sur des sujets aussi variés que la ligne de commande Linux ou l'hélium superfluide, et je retiendrai de ce stage (outre bien sûr les connaissances en hydrodynamique qu'il m'a apportées) que la diversité et le dialogue sont partout présents dans la vie d'un chercheur.

## 4 Annexe

### 4.1 Obtention d'une stratification linéaire

#### 4.1.1 La méthode des deux bacs

Dans cette méthode, on dispose de deux bacs de grande contenance, A et B. Le bac B, constamment brassé pour maintenir une concentration en sel uniforme, est initialement rempli d'un volume  $V_0$  d'eau douce, à la densité  $\rho_0$  de l'eau pure, et présente au temps  $t$  une concentration  $c(t)$ , un volume  $V(t)$  et une densité  $\rho(t)$ . Le bac A contient de l'eau salée, à la concentration  $c_1$  et de densité  $\rho_1$ , en excédent. On suppose une relation linéaire entre la concentration et l'écart de la masse volumique par rapport à l'eau pure :  $\rho(t) - \rho_0 \propto c(t)$ . Une pompe 1 assure un débit  $Q$  constant du bac A vers le bac B, et une pompe 2 assure un débit  $2Q$  du bac B vers la cuve. L'eau en provenance du bac B est introduite au fond de la cuve. Les débits étant très faibles (quelques centaines de millilitres par minute), l'eau plus dense ne se mélange pas avec l'eau déjà présente, mais se répartit sur le fond de la cuve sans perturber la stratification du volume d'eau situé au-dessus. On peut ainsi obtenir en quelques heures une stratification en densité d'excellente qualité. La relation reliant la densité  $\rho(z)$  à une profondeur  $z$  (comptée à partir de la surface et vers le bas) et la densité  $\rho_B(t)$  de l'eau contenue dans le bac B à un instant  $t$  est la suivante :  $\rho(z) = \rho_B(t)$  où  $t$  est l'instant où la hauteur d'eau dans la cuve est  $z$ . Si  $S$  est la surface du fond de la cuve, on a donc  $\rho(z) = \rho_B(zS/Q)$ .

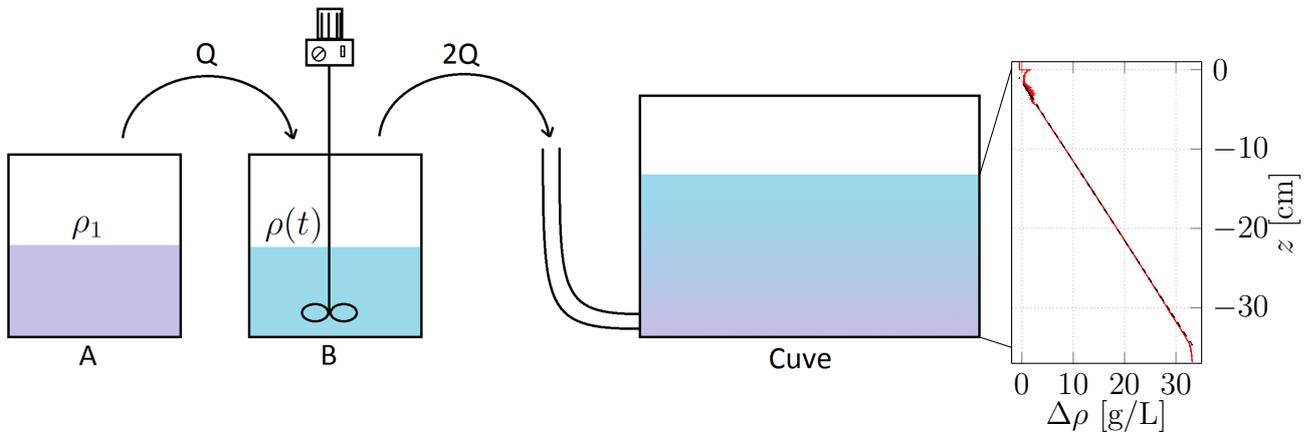


FIGURE 20 – *Principe de la méthode des deux bacs*

Or on peut connaître la concentration en sel de l'eau du bac B à tout instant, et donc sa densité, donc la stratification en densité dans la cuve. En effet, si  $V(t)$  est le volume d'eau contenu dans le bac B, on a

$$\frac{d(cV)}{dt} = c_1Q - 2c(t)Q ,$$

donc

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_1Q - 2\rho(t)Q .$$

Si on remarque en plus que  $V(t) = V_0 - Qt$ , cette équation se réécrit

$$V \frac{d(\rho - \rho_1)}{dt} = -(\rho - \rho_1)Q .$$

Cette équation différentielle admet comme solution vérifiant les conditions initiales

$$\rho(t) = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) \frac{Qt}{V_0} .$$

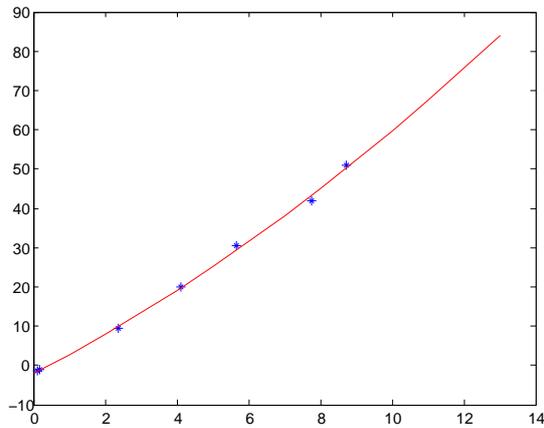
La stratification ainsi obtenue est linéaire, et  $\frac{d\rho}{dz} = \frac{S}{V_0}(\rho_1 - \rho_0)$ .

En pratique, une faible variation de la stratification d'un remplissage à un autre importe assez peu, car la physique des ondes internes ne dépend que de  $\omega/N$ , le rapport entre la pulsation des ondes et la pulsation de Brunt-Väisälä. On ajuste alors  $V_0$  pour que la profondeur d'eau reste toujours suffisante pour assurer un bon mélange, et on choisit  $\rho_1$  pour avoir  $N \approx 1$  rad/s.

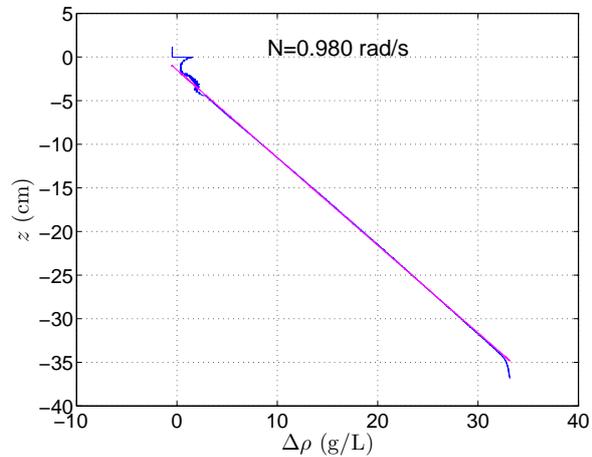
#### 4.1.2 Vérification de la stratification

La concentration en sel influe sur la densité de l'eau, mais aussi sur sa conductivité. On utilise donc une sonde conductimétrique pour connaître la densité d'une solution d'eau salée, à partir d'une courbe obtenue par étalonnage pour différentes solutions de référence. Elle est plongée lentement dans la cuve, à vitesse uniforme, pour qu'on puisse relier la mesure à un instant donné et la densité à une profondeur donnée. Cette méthode de mesure perturbe peu la stratification et on l'effectue loin de la zone d'observation. La sonde dispose d'un thermomètre pour prendre en compte l'effet de la température. On trouve typiquement le genre de courbes ci-dessous. Par interpolation linéaire, on en déduit

la valeur de  $N = \sqrt{-\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\rho}{dz}}$ .



a)



b)

FIGURE 21 – a) courbe reliant  $\Delta\rho = \rho - 1\text{kg/L}$  exprimé en g/L, où  $\rho$  est la densité de l'eau salée, en fonction de l'écart entre la tension aux bornes de la sonde conductimétrique et la tension en l'absence de courant (isolant parfait), en V. b)  $\Delta\rho$  en fonction de la profondeur, approximation affine et fréquence de Brunt-Väisälä correspondante.

## Bibliographie

- BOURGET, BAPTISTE, DAUXOIS, THIERRY, JOUBAUD, SYLVAIN & ODIER, PHILIPPE 2013 Experimental study of parametric subharmonic instability for internal plane waves. *Journal of Fluid Mechanics* **723**, 1–20.
- FINCHAM, A. & DELERCE, G. 2000 Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Experiments in Fluids* **29** (1), S013–S022.
- FLANDRIN, PATRICK 1998 *Time-frequency/time-scale analysis*, , vol. 10. Academic Press.
- GOSTIAUX, L., DIDELLE, H., MERCIER, S. & DAUXOIS, T. 2007 A novel internal waves generator. *Experiments in Fluids* **42** (1), 123–130.
- GRENIER, E. 1997 Oscillatory perturbations of the navier stokes equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **76** (6), 477 – 498.
- HURLEY, D.G. & KEADY, G. 1997 The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. part 2 : Approximate viscous solution. *Journal of Fluid Mechanics* **351**, 119–138.
- MERCIER, MATTHIEU J., GARNIER, NICOLAS B. & DAUXOIS, THIERRY 2008 Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the hilbert transform. *Physics of Fluids* **20** (8), 086601.
- MUNK, WALTER & WUNSCH, CARL 1998 Abyssal recipes ii : energetics of tidal and wind mixing. *Deep Sea Research Part I : Oceanographic Research Papers* **45** (12), 1977 – 2010.
- PEACOCK, THOMAS 2013 Presentation at workshop "waves and instabilities in geophysical and astrophysical flows", les houches, france.
- SCOLAN, HÉLÈNE, ERMANYUK, EUGENY & DAUXOIS, THIERRY 2013 Nonlinear fate of internal wave attractors. *Phys. Rev. Lett.* **110**, 234501.