TD1 : Langage des catégories et rappels de topologie

Exercice 1. Foncteurs représentables

Soit k un corps et $n \geq 1$ un entier naturel. On désignera par k-alg la catégorie des k-algèbres associatives, commutatives et unifères.

1. Montrer que les foncteurs suivants sont représentables.
   (a) Le foncteur $\mathbb{A}^n : k - \text{alg} \to \text{Ens}$, qui associe à une k-algèbre T, l'ensemble $\mathbb{A}^n(T) = T^n$.
   (b) Le foncteur $\text{GL}_n : k - \text{alg} \to \text{Grp}$, qui associe à une k-algèbre T, le groupe $\text{GL}_n(T)$ des matrices inversibles de taille n à coefficients dans T .
2. Montrer que le déterminant définit une transformation naturelle de GL_n vers GL_1.
3. Soit V un k-espace vectoriel. Montrer que le foncteur $F : k - \text{alg} \to \text{Ens}$ qui associe à une k-algèbre T, l'ensemble $F(T)$ des applications k-linéaires de V vers T est représentable.
4. Soit X un espace topologique muni d'une action à gauche continue d'un groupe G. Montrer que le foncteur $\text{Top} \to \text{Ens}$, qui à Y associe les applications continues G-invariantes de X vers Y est représentable.

Exercice 2. Monomorphismes et épimorphismes

Soit C une catégorie et soit $f : X \to Y$ un morphisme entre objets de C. On dit que f est un monomorphisme (resp. épimorphisme) si pour tout objet Z de C, la flèche naturelle $\text{Hom}_C(Z, X) \to \text{Hom}_C(Z, Y)$ est injective (resp. la flèche naturelle $\text{Hom}_C(Y, Z) \to \text{Hom}_C(X, Z)$ est injective).

1. Montrer qu'un morphisme injectif (resp. surjectif) dans les catégories Ens, Grp, Ann et k-ev (où k est un corps fixé) est un monomorphisme (resp. épimorphisme).
2. Montrer qu'un monomorphisme dans les catégories Ens, Grp, Ann et k-ev est un morphisme injectif.
3. Montrer qu'un épimorphisme dans les catégories Ens, Grp et k-ev est un morphisme surjectif.
4. Donner un exemple d'épimorphisme d'anneaux non surjectif.

Exercice 3. Limites, colimites et adjonction

1. Soit $F : C \to D$ un foncteur adjoint à droite entre deux catégories C et D. Montrer que F commute aux limites. Le foncteur oubli de Grp vers Ens commute-il aux limites ? aux colimites ?
2. Soit $F : \text{Ens} \to \text{Ens}$ un foncteur commutant aux colimites. Soit G un groupe et X un G-ensemble, i.e un ensemble muni d'une action de G. Montrer que $F(X)$ est un G-ensemble et que $F(G\backslash X) = G\backslash F(X)$.
3. Montrer que le foncteur d'inclusion de la catégories des groupes abéliens dans la catégories des groupes admet un adjoint à gauche.
4. Soit k un corps. Montrer que le foncteur d'oubli de la catégorie des k-ev vers Ens admet un adjoint à gauche.
5. Soit $F : \text{Ens} \to \text{Ens}$ un foncteur qui préserve les colimites. Montrer que F est de la forme $F : X \mapsto X \times E$ pour un certain ensemble E.
6. Déterminer la limite du diagramme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\geq 1}$ dans Ab où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est la projection si m divise n. On note la limite $\widehat{\mathbb{Z}}$ et on l'appelle le *complété profini* de $\mathbb{Z}$.
7. Soit p un nombre premier. Déterminer la limite du diagramme $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{n\geq 1}$ dans Ab où $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ est la projection si $n \geq m$. On note la limite $\mathbb{Z}_p$ et on l'appelle le *groupe des entiers p-adiques*.
8. Montrer que $\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_p \mathbb{Z}_p$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.fr, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 4. Espaces projectifs

Soit K un corps (on supposera ici que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'espace $\mathbb{P}^n(K)$ est défini comme étant le quotient de $K^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action du groupe multiplicatif K^* agissant par homothéties. Pour tout $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : \ldots : x_n]$ son image dans $\mathbb{P}^n(K)$.

1. (a) Le sous-groupe $\{\pm 1\}$ de $\mathbb{R}^*$ agit sur $\mathbb{S}^n$ par multiplication. Montrer que le quotient $\mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
   (b) Le sous-groupe $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes de module 1 agit sur $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par multiplication. Montrer que le quotient $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ et que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.
3. (a) Pour $n \geq 1$, montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} K^n & \to & \mathbb{P}^n(K) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & [1 : x_1 : \ldots : x_n] \end{array}$$

   définit un homéomorphisme entre K^n et un ouvert U_0 de $\mathbb{P}^n(K)$ que l'on explicitera.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}^n(K)$ admet un recouvrement par $n+1$ ouverts homéomorphes à K^n et que le complémentaire de chacun de ces ouverts est homéomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(K)$.

Exercice 5. Tore

On définit le tore comme l'espace topologique $\mathbb{T}$ quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x,0) \sim (x,1)$ et $(0,y) \sim (1,y)$ pour tous $x, y \in [0,1]$.

Montrer que $\mathbb{T}$ est homéomorphe aux espaces suivants :

(a) le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,

(b) le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du groupe discret $\mathbb{Z}^2$ agissant par translations (de vecteurs non tous colinéaires),

(c) le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont image d'un point du cercle du plan $\{y = 0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1 par une rotation d'axe (Oz)).

Exercice 6. Écrasements et quotients

Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-ensemble. On note X/A l'espace quotient de X par la relation

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si} \quad x, y \in A \quad \text{ou} \quad x = y.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\bar{D}^n$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\bar{D}^n/\partial\bar{D}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.
2. On suppose que X est séparé et que A est compact. Montrer que X/A est séparé.
3. Trouver un espace topologique séparé X et un sous-espace A de X tel que X/A soit non séparé.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, l'espace des matrices de taille n . Montrer que le quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\backslash\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas séparé.

Exercice 7. Bouquets d'espaces

Pour $(X_i, x_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés, on note $\vee_{i \in I} X_i$ l'espace, appelé bouquet des X_i, obtenu à partir de l'union disjointe des X_i en identifiant tous les points x_i.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut voir $\mathbb{S}^{n-1}$ comme sous-espace de $\mathbb{S}^n$ (son « équateur ») par l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$. Montrer que $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ est un bouquet de deux sphères de dimension n.
2. La *boucle d'oreille hawaïenne* est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$, pour les entiers $n \geq 1$. Soit $(\mathbb{S}^1_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de copies de $\mathbb{S}^1$ (avec un point distingué). Montrer que $\vee_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{S}^1_i$ n'est pas homéomorphe à H.

Exercice 8. Bijections continues

Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une bijection continue.

1. Montrer que f est un monomorphisme et un épimorphisme dans la catégorie des espaces topologiques. Est ce que f est nécessairement un homéomorphisme ?
2. Montrer que si X est quasi-compact et Y est séparé alors f est un homéomorphisme.

Exercice 9. Compactification d'Alexandrov

Soit X un espace topologique localement compact et $\{\infty\}$ un singleton. On munit $\widetilde{X} = X \sqcup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de X et les complémentaires dans $\widetilde{X}$ des compacts de X.

1. Vérifier que $\widetilde{X}$ est bien un espace topologique.
2. Montrer que $\widetilde{X}$ est un espace compact. Montrer que le sous-ensemble $\widetilde{X} \setminus \{\infty\}$, muni de la topologie induite, est homéomorphe à l'espace X de départ.
3. Montrer que la topologie définie sur $\widetilde{X}$ est l'unique topologie telle que :
   (a) $\widetilde{X}$ soit compact,
   (b) l'application identité $X \to \widetilde{X} \setminus \{\infty\}$ soit un homéomorphisme.
4. Montrer que $\widetilde{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$, la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.