Examen de Topologie et Calcul Différentiel

(Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits)

(Les deux problèmes sont indépendants. La partie ***II.*** *du problème 2 est* *facultative)*

Problème 1

Si E est un espace vectoriel normé, on note E' son dual topologique, muni de sa norme usuelle. On note E'' le dual de $(E', \|\cdot\|_{E'})$ i.e. $E'' = (E')'$. On munit E'' de la norme $\|\varphi\|_{E''} = \sup_{\|\ell\|_{E'} \leq 1} |\varphi(\ell)|$. Il existe une injection naturelle

$$\begin{aligned} j : E &\to E'' \\ x &\to \varphi_x \end{aligned} \tag{1}$$

où φ_x est la forme linéaire continue sur E' donnée par $\varphi_x(\ell) = \ell(x)$. Comme

$$\|\varphi_x\|_{E''} = \sup_{\|\ell\|_{E'} \leq 1} |\ell(x)| = \|x\|_E,$$

j est une injection isométrique, qui permet de considérer E comme un sous-espace de E''.

1. (a) Soit c_0 le sous-espace de $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ donné par les suites tendant vers zéro à l'infini. Montrer que c_0 est un sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.
   (b) Montrer que l'application
   $$\begin{aligned} \Phi : \ell^1 &\to c_0' \\ a = (a_n)_n &\to \Big(x = (x_n)_n \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n\Big) \end{aligned}$$
   est un isomorphisme.
2. Déterminer c_0'' et montrer que l'image de la boule unité de c_0 par l'injection (1) est dense dans la boule unité de c_0'' pour la topologie faible-$*$ sur c_0''.

Le but du problème est de démontrer le théorème de Goldstine qui affirme que, si E est un espace vectoriel normé quelconque, la boule unité fermée B_E de E est dense dans la boule unité fermée $B_{E''}$ de E'' pour la topologie faible-$*$.

3. Soient F un espace vectoriel, $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_N$ des formes linéaires sur F telles que $G = \bigcap_{j=1}^N \operatorname{Ker} \theta_j \subset \operatorname{Ker} \theta$. Montrer que θ est combinaison linéaire de $\theta_1, \ldots, \theta_N$.
4. Soit F un espace vectoriel normé. Notons F' le dual topologique de F, désignons par F'_σ l'espace vectoriel F' muni de la topologie faible-$*$ et par $(F'_\sigma)'$ l'ensemble des formes linéaires continues sur F'_σ. Soit
   $$\begin{aligned} j_\sigma : F &\to (F'_\sigma)' \\ x &\to j_\sigma(x) \end{aligned} \tag{2}$$
   avec $j_\sigma(x)(\ell) = \ell(x)$ pour tout $x \in F$, $\ell \in F'$ (On remarquera que $\ell \to \ell(x)$ est bien continue sur F'_σ par définition de la topologie faible-$*$ sur F').

(a) Montrer que j_σ est injective.
(b) Montrer que si $\varphi \in (F'_\sigma)'$, il existe $x_1, \dots, x_n \in F$ tels que $\bigcap_{j=1}^N \operatorname{Ker} \varphi_{x_j} \subset \varphi^{-1}(]-1,1[)$.
(c) Montrer que j_σ est surjective.

5. On note V l'adhérence de $B_E \subset E''$ pour la topologie faible-$*$ $\sigma(E'', E')$. Montrer que V est compacte pour cette topologie.
6. Supposons que $V \neq B_{E''}$ et soit $\varphi \in B_{E''} - V$. Montrer qu'il existe θ forme linéaire continue sur E'' muni de la topologie faible-$*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\theta(\varphi) > \alpha > \theta(v)$ pour tout $v \in V$ (On rappelle que la topologie faible-$*$ est localement convexe).
7. Montrer qu'il existe $\ell \in E'$ telle que $\|\ell\|_{E'} < \varphi(\ell)$.
8. Conclure que B_E est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie faible-$*$.

Problème 2

I. Soit H un espace de Hilbert réel, H' son dual. Si $F : H \to \mathbb{R}$ est une fonction C^1, on note $DF(x) \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ la différentielle de F en x. Le théorème de Riesz permet d'identifier $DF(x) \in H'$ à un vecteur $\nabla F(x) \in H$ par l'égalité $DF(x) \cdot h = \langle \nabla F(x), h \rangle$ pour tout $h \in H$.

On suppose donnée dans cette partie une telle fonction C^1. On suppose de plus que cette fonction vérifie la condition $(*)$ suivante :

(i) $x \to \nabla F(x)$ est lipschitzienne sur H,
(ii) $F(0) = 0$ et il existe des réels $\rho > 0, \alpha > 0$ tels que $F(x) \geq \alpha$ pour tout x avec $\|x\| = \rho$,
(iii) Il existe un vecteur $v \in H$ de norme $\|v\| > \rho$ tel que $F(v) < 0$.

On note $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$.

1. Montrer que le réel c défini par $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{s \in [0,1]} F(\gamma(s))$ vérifie $c \geq \alpha$.
2. Soient $\epsilon \in]0, \frac{c}{2}[$ et $M \subset N$ les ensembles
$$M = \{x \in H; |F(x) - c| \leq \epsilon \text{ et } \|\nabla F(x)\| \geq 2\epsilon\}$$
$$N = \{x \in H; |F(x) - c| < 2\epsilon \text{ et } \|\nabla F(x)\| > \epsilon\}.$$
Montrer que la fonction $g(x) = \frac{d(x, H-N)}{d(x, H-N) + d(x, M)}$ est bien définie et localement lipschitzienne.
3. On pose, pour tout x dans H, $X(x) = -g(x) \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}$. Montrer que pour tout $x \in H$, l'équation différentielle
$$\frac{d}{dt}\Phi(t,x) = X(\Phi(t,x))$$
$$\Phi(0,x) = x$$
admet une unique solution définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout réel t fixé, $x \to \Phi(t,x)$ envoie Γ dans lui-même.
5. On suppose que pour tout $x \in H$ vérifiant $F(x) < c + \epsilon$, on a soit $F(x) \leq c - \epsilon$, soit $\|\nabla F(x)\| \geq 2\epsilon$. Montrer que si x vérifie $F(x) < c + \epsilon$, alors $F(\Phi(1,x)) \leq c - \epsilon$. (Indication : calculer pour $t \in [0,1]$ $F(\Phi(1,x)) - F(\Phi(t,x))$ comme l'intégrale de sa dérivée).
6. Montrer qu'il existe $x \in H$ tel que $|F(x) - c| < \epsilon$ et $\|\nabla F(x)\| < 2\epsilon$ (Indication : introduire $\gamma \in \Gamma$ tel que pour tout $s \in [0,1], F(\gamma(s)) < c + \epsilon$ et raisonner par l'absurde).

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de H est une suite de *Palais-Smale* de F au niveau c si $F(x_n) \to c$ et $\nabla F(x_n) \to 0$.

7. Montrer que si F vérifie $(*)$, il existe une suite de Palais-Smale au niveau c.

II. On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité et on identifie systématiquement fonctions définies sur le cercle unité et fonctions 2π-périodiques. On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes trigonométriques de la forme $\mathrm{Re}\,[\sum_{k=1}^N \lambda_k e^{ikx}]$ ($\lambda_k \in \mathbb{C}$) i.e. l'espace des polynômes trigonométriques à valeurs réelles, de moyenne nulle sur $[0, 2\pi]$. Si $u, v \in \mathcal{P}$, on pose

$$\langle u, v\rangle_0 = \int_0^{2\pi} u(x)v(x)\,dx, \|u\|_0^2 = \langle u, u\rangle_0,\ \langle u, v\rangle_1 = \int_0^{2\pi} (u(x)v(x) + u'(x)v'(x))\,dx, \|u\|_1^2 = \langle u, u\rangle_1.$$

On désigne par E^0 (resp. E^1) le complété de $\mathcal{P}$ pour la norme $\|\cdot\|_0$ (resp. $\|\cdot\|_1$). On définit pour $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$ la fonction $k(x, y) = \mathbb{1}_{\{0<y<x\}} + \frac{y}{2\pi}$. On prolonge k par périodicité en une fonction sur $\mathbb{R}^2$, 2π-périodique en x et en y.

1. (a) Montrer que l'application $u \to u'(x)$ définie sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans E^0 se prolonge de manière unique en une application linéaire continue, que l'on notera ∂_x, de E^1 dans E^0.
   (b) Monter que l'injection de $\mathcal{P}$ dans l'espace $C_0^0(\mathbb{S}^1)$ des fonctions continues 2π-périodiques de moyenne nulle sur une période se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de E^1 à valeurs dans $C_0^0(\mathbb{S}^1)$.
   (c) Pour $u \in \mathcal{P}$, on pose $\partial_x^{-1}u = \int_0^{2\pi} k(x, y)u(y)\,dy$. Montrer que ∂_x^{-1} se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de E^0 à valeurs dans E^1.
2. En composant ∂_x^{-1} par l'injection naturelle de E^1 dans E^0, on peut considérer $u \to \partial_x^{-1}u$ come une application de E^0 dans lui-même. Montrer que ∂_x^{-1} est compacte de E^0 dans E^0.
3. Soit $x \to a(x)$ une fonction C^∞ 2π-périodique, M un entier supérieur ou égal à 4. On pose pour $v \in E^0$
$$F(v) = \frac{1}{2}\|v\|_0^2 - \int_0^{2\pi} a(x)[\partial_x^{-1}v]^M\,dx.$$
   Montrer que F est différentiable sur E^0 et que sa différentielle est donnée par
$$DF(v) \cdot h = \int_0^{2\pi} v(x)h(x)\,dx - \int_0^{2\pi} Ma(x)(\partial_x^{-1}v(x))^{M-1}\partial_x^{-1}h(x)\,dx$$
   pour tout $h \in E^0$.

   On admettra dans la suite qu'en fait F est C^2. On suppose désormais M pair et $a(x) > 0$ pour tout x.
4. Montrer que F admet une suite de Palais-Smale $(v_n)_n$ à un niveau $c > 0$.
5. Montrer que la suite de la question 4. est bornée (Indication : On pourra calculer $DF(v_n) \cdot v_n$).
6. Montrer que l'on peut extraire de la suite de Palais-Smale une sous-suite, également notée $(v_n)_n$, telle que $\partial_x^{-1}v_n$ converge dans E^0 vers une limite u.

   Remarque : On peut montrer, en explicitant la condition $DF(v_n) \to 0$ de la définition des suites de Palais-Smale, que la limite u obtenue à la question précédente est dans E^1 et est une solution (non identiquement nulle) de l'équation $\partial_x u = -M\partial_x^{-1}\Pi[a(x)u^{M-1}]$, où Π est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{S}^1)$ sur l'hyperplan fermé E^0. Cette dernière équation peut d'ailleurs se réécrire comme une équation différentielle $\partial_x^2 u = -M\Pi[a(x)u^{M-1}]$.