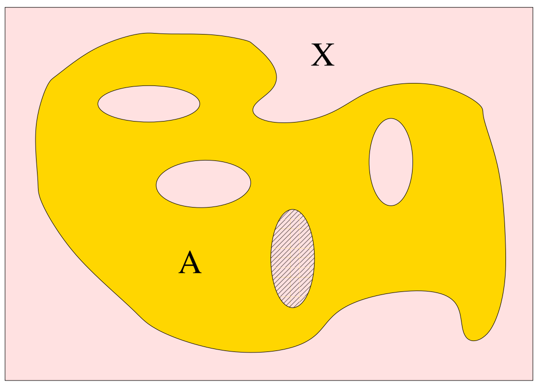
# Examen partiel de Topologie et Calcul Différentiel

**(Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits)**

*(L'exercice et le problème sont indépendants)*

## Exercice

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat "intuitivement évident" selon lequel, si $A$ est une partie connexe d'un ensemble connexe $X$, le complémentaire d'une composante connexe de $X - A$ est connexe.




1. Soient $X$ un espace topologique, $Y$ et $Z$ deux parties de $X$, munies de la topologie induite, telles que $X = Y \cup Z$. Soit $M \subset Y \cap Z$. On suppose $M$ ouvert (resp. fermé) dans $Y$ et dans $Z$. Montrer que $M$ est ouvert (resp. fermé) dans $X$.
2. Soit $X$ un espace topologique connexe, $A_1$ une partie connexe non vide de $X$, $C$ une partie non vide de $X - A_1$.
   (a) Montrer que si $U$ et $V$ sont deux ouverts de $X$ tels que $U \cup V$ recouvre $A_1 \cup C$ et que $(U \cap V) \cap (A_1 \cup C) = \emptyset$, soit $A_1 \subset U$ et $A_1 \cap V = \emptyset$, soit $A_1 \subset V$ et $A_1 \cap U = \emptyset$.
   (b) On suppose de plus $C$ ouvert et fermé dans $X - A_1$. Montrer que $A_1 \cup C$ est connexe (Indication : Appliquer 1. avec $Y = A_1 \cup C$, $Z = X - A_1$).
3. On se donne $A$ sous-ensemble connexe non vide de l'espace connexe $X$ et $B$ composante connexe de $X - A$. Montrer que $X - B$ est connexe. (Indication : On introduira $A_1$ le plus grand sous-ensemble connexe de $X - B$ contenant $A$, et on appliquera la question précédente à un $C$ bien choisi).

## Problème

**0.** *(Question préliminaire)* On rappelle qu'une application isométrique entre deux espaces métriques est une application préservant la distance, et qu'une isométrie est une application isométrique surjective.

Soit $(X, d)$ un espace métrique compact non vide et $f : (X, d) \to (X, d)$ une application continue isométrique. Montrer que $f$ est un homéomorphisme.

**I.** Si $X$ et $Y$ sont deux ensembles, une correspondance entre $X$ et $Y$ est un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $X \times Y$ tel que, si l'on désigne par $\pi_X : X \times Y \to X, \pi_Y : X \times Y \to Y$ les deux projections naturelles, $\pi_X|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to X$ et $\pi_Y|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to Y$ soient surjectives. Lorsque $X$ (resp. $Y$) est muni d'une distance $d_X$ (resp. $d_Y$), la *distorsion* $dis\,\mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$ est définie par

$$dis\,\mathcal{R} = \sup\{|d_X(x,x') - d_Y(y,y')|; (x,y) \in \mathcal{R}, (x',y') \in \mathcal{R}\}.$$

La "distance de Gromov-Hausdorff" entre $X$ et $Y$ est définie par

$$d_{\mathrm{GH}}(X,Y) = \frac{1}{2} \inf_{\mathcal{R}} dis\,\mathcal{R},$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les correspondances sur $X \times Y$.

1. Montrer que si $X$ et $Y$ sont bornés, $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) \leq \frac{1}{2}[\mathrm{diam}\, X + \mathrm{diam}\, Y]$.
2. Supposons que $X$ et $Y$ sont des sous-espaces bornés d'un même espace métrique $(Z, d_Z)$ et que $d_Z$ induit les distances de $X$ et $Y$ respectivement. On rappelle que la distance de Hausdorff entre $X$ et $Y$ est définie par

$$d_{\mathrm{H}}(X,Y) = \max[\sup_{x\in X} d_Z(x,Y), \sup_{y \in Y} d_Z(y,X)].$$

   Montrer que $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) \leq d_{\mathrm{H}}(X,Y)$. (Indication : Introduire $\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times Y; d_Z(x,y) < r\}$ pour tout $r > d_{\mathrm{H}}(X,Y)$).
3. Montrer que si $X, Y, Z$ sont trois espaces métriques bornés $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) \leq d_{\mathrm{GH}}(X,Z) + d_{\mathrm{GH}}(Z,Y)$.
4. Soient $X$ et $Y$ deux espaces métriques tels qu'il existe une isométrie $f : X \to Y$. Montrer que $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) = 0$.

Soit $\epsilon \in ]0, +\infty[$. On dit qu'un sous-ensemble $A$ d'un espace métrique est $\epsilon$-dense si $X$ est recouvert par $\bigcup_{a\in A} B(a,\epsilon)$. On appelle $\epsilon$-isométrie d'un espace métrique $(X, d_X)$ dans un espace métrique $(Y, d_Y)$ toute application (non nécessairement continue) $f : X \to Y$ telle que $dis\, f \overset{\text{déf}}{=} \sup_{x,x'\in X} |d_Y(f(x), f(x')) - d_X(x,x')| < \epsilon$ et que $f(X)$ soit $\epsilon$-dense dans $Y$.

5. Soient $X$ et $Y$ deux espaces métriques tels que $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) = 0$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une $\epsilon$-isométrie de $X$ dans $Y$.
6. Soient $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques *compacts* vérifiant $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) = 0$.
   (a) Montrer que si $S \subset X$ est un sous-ensemble dénombrable de $X$, il existe $f : S \to Y$ vérifiant $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x,x')$ pour tous $x, x' \in S$.
   (b) Montrer qu'il existe des applications isométriques $f_1 : X \to Y$ et $f_2 : Y \to X$.
   (c) Montrer que $f_1 \circ f_2$ est bijective. Conclure que $X$ et $Y$ sont isométriques.

**II.** Le but de cette deuxième partie est de montrer le théorème de pré-compacité de Gromov, qui affirme qu'une suite totalement bornée (au sens qui sera défini plus tard) d'espaces métriques compacts admet une sous-suite convergente pour la distance de Gromov-Hausdorff.

1. Soit $X$ un espace métrique borné, $X_0$ un sous-ensemble $\epsilon$-dense dans $X$. Montrer l'inégalité $d_{\mathrm{H}}(X_0, X) \leq \epsilon$.
2. Soient $I$ un ensemble d'indices fini et $(X^0 = \{x_i\}_{i\in I}, d_X)$, $(Y^0 = \{y_i\}_{i \in I}, d_Y)$ deux espaces métriques finis de même cardinal. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tous $i, j \in I$ $|d_X(x_i, x_j) - d_Y(y_i, y_j)| < \epsilon$. Montrer que $d_{\mathrm{GH}}(X_0, Y_0) < \epsilon/2$.

On dit qu'une suite $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces métriques compacts est *totalement bornée* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
(i) Il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in N$, $\operatorname{diam} X_n \leq D$.
(ii) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que, pour tout entier naturel $n$, $X_n$ contienne un sous-ensemble $\epsilon$-dense de cardinal au plus $N(\epsilon)$.

3. On définit $N_1 = N(1)$ et pour tout $k \geq 2$, $N_k = N_{k-1} + N(1/k)$. Montrer qu'il existe $(X_{n_\ell})_\ell$ suite extraite de $(X_n)_n$ et, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, un sous-ensemble $S_{n_\ell} = \{x_{i,n_\ell}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $X_{n_\ell}$ tel que :
   - Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, la suite $(d_{n_\ell}(x_{i,n_\ell}, x_{j,n_\ell}))_\ell$ converge vers une limite finie lorsque $\ell$ tend vers l'infini.
   - L'ensemble $S_{n_\ell}^{(k)} = \{x_{i,n_\ell}\}_{1\leq i\leq N_k}$ est $1/k$-dense dans $X_{n_\ell}$.

On note désormais simplement $(X_n)_n$, $(S_n)_n$, $(S_n^{(k)})_n$ les suites extraites précédentes. On considère $X = \{x_i; i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable abstrait. On définit $d : X \times X \to \mathbb{R}$ par $d(x_i, x_j) = \lim_{n\to+\infty} d_n(x_{i,n}, x_{j,n})$.

4. Montrer que $d$ est une pseudo-distance sur $X$.

On note $X/d$ l'ensemble quotient de $X$ pour la relation d'équivalence $x \sim y$ si $d(x,y) = 0$. C'est un espace métrique pour la distance quotient. Soit $(\overline{X}, \bar{d})$ le complété de ce quotient et pour tout entier naturel $i$, notons $\bar{x}_i \in X/d \subset \overline{X}$ la classe de $x_i$. On note $S^{(k)} = \{\bar{x}_i; 1 \leq i \leq N_k\} \subset \overline{X}$.

5. Montrer que $S^{(k)}$ est $\frac{2}{k}$-dense dans $\overline{X}$.
6. Montrer que $(\overline{X}, \bar{d})$ est compact.
7. Montrer que pour tout entier $k$, $d_{\mathrm{GH}}(S_n^{(k)}, S^{(k)})$ tend vers zéro lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
8. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} d_{\mathrm{GH}}(X_n, \overline{X}) = 0$.