CORRIGÉ DE L'EXAMEN PARTIEL

EXERCICE

1. Il existe U et V ouverts de X tels que $M = Y \cap U = Z \cap V$. On a $M = Y \cap U \cap V = Z \cap U \cap V = (Z \cup Y) \cap U \cap V = U \cap V$, donc M est un ouvert de X. On raisonne de même avec les fermés.
2. (a) Comme $U \cap A_1$ et $V \cap A_1$ forment une partition de A_1 en deux ouverts, la conclusion résulte de la connexité de A.
   (b) Soient U, V comme à la question précédente, et supposons par exemple $A_1 \subset U$ et $V \cap A_1 = \emptyset$. Alors $M = C \cap V$ est un ouvert de $Z = X - A_1$ par hypothèse. Comme $M = (A_1 \cup C) \cap V$, c'est aussi un ouvert de $Y = A_1 \cup C$. Puisque $U \cup V$ recouvre $A_1 \cup C$ et que $U \cap V \cap (A_1 \cup C) = \emptyset$, on a aussi $M = (X - U) \cap C$, donc M est fermé dans $Z = X - A_1$. Enfin puisque $M = (X - U) \cap (A_1 \cup C)$, c'est aussi un fermé de $Y = A_1 \cup C$. Daprès 1., M est donc ouvert et fermé dans X, donc puisque X est connexe, soit $M = X$ (ce qui est impossible puisque $C \neq X$ par hypothèse), soit $M = \emptyset$, donc $(A_1 \cup C) \cap V = \emptyset$, ce qui montre la connexité de $A_1 \cup C$.
3. Soit A_1 le plus grand sous-ensemble connexe de $X - B$ contenant A. Si $A_1 = X - B$, on a la conclusion. Supposons désormais $D = X - B - A_1 \neq \emptyset$. Alors $B \cup D$ ne peut être connexe, puisque B est une composante connexe de $X - A$, donc de $X - A_1$. Il existe donc U, V ouverts de X tels que $(U \cap (B \cup D)) \cup (V \cap (B \cup D)) = B \cup D$, $U \cap V \cap (B \cup D) = \emptyset$, $U \cap (B \cup D) \neq \emptyset$, $V \cap (B \cup D) \neq \emptyset$. Par connexité de B, on a par exemple $B \subset U$, $V \cap B = \emptyset$. On écrit

   $$D \cap V = (B \cup D) \cap V = (X - A_1) \cap V, \ D \cap V = (B \cup D) \cap (X - U) = (X - A_1) \cap (X - U).$$

   Cela montre que $D \cap V$ est ouvert et fermé dans $X - A_1$. On applique la question 2. (b) à $C = D \cap V$. On conclut que $A_1 \cup C$ est connexe. Comme C est non vide, cela contredit la maximalité de A_1.

PROBLÈME

0. Si f n'est pas surjective, soit y un point n'appartenant pas à $f(X)$. Comme $f(X)$ est compact, $c = d(y, f(X)) > 0$ et pour tout entier naturel n, $d(f^{\circ n}(y), f^{\circ(n+1)}(X)) = c$. Si $K = \bigcap_n f^{\circ n}(X)$, on a donc pour tout n $d(f^{\circ n}(y), K) \geq c$. Quitte à extraire, on peut supposer $f^{\circ n_k}(y) \to z$. Mais alors z est dans K et doit vérifier $d(z, K) \geq c > 0$, d'où la contradiction cherchée.

I.

1. On prend $\mathcal{R} = X \times Y$. Alors $dis\, \mathcal{R} \leq \operatorname{diam} X + \operatorname{diam} Y$, d'où la conclusion.
2. Soit $r > d_{\mathrm{H}}(X, Y)$. Alors $\mathcal{R}$ est une correspondance : puisque $\sup_{x \in X} d_Z(x, y) < r$, il existe pour tout $x \in X$ un point $y \in Y$ avec $d_Z(x, y) < r$ i.e. $(x, y) \in \mathcal{R}$. On obtient de même la propriété symétrique. De plus,

   $$dis\, \mathcal{R} \leq \sup\{|d_Z(x, x') - d_Z(y, y')|; d_Z(x, y) < r, d_Z(x', y') < r\}.$$

Or

$$\begin{aligned}|d_Z(x,x') - d_Z(y,y')| &\leq |d_Z(x,x') - d_Z(y,x')| + |d_Z(y,x') - d_Z(y,y')| \\ &\leq d_Z(x,y) + d_Z(x',y') < 2r,\end{aligned}$$

d'où $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) < r$.

3. Soit $\epsilon > 0$ et $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$) correspondance sur $X \times Z$ (resp. $Z \times Y$) avec $\frac{1}{2}\mathit{dis}\,\mathcal{R}_1 < d_{\mathrm{GH}}(X,Z) + \epsilon$ (resp. $\frac{1}{2}\mathit{dis}\,\mathcal{R}_2 < d_{\mathrm{GH}}(Z,Y) + \epsilon$). Soit $\mathcal{R}_3$ correspondance sur $X \times Y$ définie par $(x,y) \in \mathcal{R}_3$ s'il existe $z \in Z$ avec $(x,z) \in \mathcal{R}_1$ et $(z,y) \in \mathcal{R}_2$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{R}_3$ est une correspondance. Soient $(x,y) \in \mathcal{R}_3$, $(x',y') \in \mathcal{R}_3$. Il existe $z \in Z, z' \in Z'$ avec $(x,z) \in \mathcal{R}_1$, $(x',z') \in \mathcal{R}_1$, $(z,y) \in \mathcal{R}_2$, $(z',y') \in \mathcal{R}_2$. Alors

$$|d_X(x,x') - d_Y(y,y')| \leq |d_X(x,x') - d_Z(z,z')| + |d_Z(z,z') - d_Y(y,y')| \leq \mathit{dis}\,\mathcal{R}_1 + \mathit{dis}\,\mathcal{R}_2.$$

En prenant la borne supérieure en $(x,y) \in \mathcal{R}_3$, $(x',y') \in \mathcal{R}_3$ on obtient $\mathit{dis}\,\mathcal{R}_3 \leq \mathit{dis}\,\mathcal{R}_1 + \mathit{dis}\,\mathcal{R}_2$. L'inégalité triangulaire en découle en passant aux bornes inférieures sur les correspondances.

4. Posons $\mathcal{R} = \{(x, f(x)); x \in X\}$. Comme f est surjective, $\mathcal{R}$ est une correspondance, et comme f est isométrique $\mathit{dis}\,\mathcal{R} = 0$ d'où $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) = 0$.

5. Soit $\epsilon > 0$ et $\mathcal{R}$ une correspondance avec $\mathit{dis}\,\mathcal{R} < \epsilon$. Pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ avec $(x,y) \in \mathcal{R}$. On choisit un tel point que l'on note $f(x)$. On a $\mathit{dis}\,f \leq \mathit{dis}\,\mathcal{R} < \epsilon$. De plus, pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ avec $(x,y) \in \mathcal{R}$. Comme $(x, f(x)) \in \mathcal{R}$, on a $|d_X(x,x) - d_Y(y, f(x))| < \epsilon$ i.e. $f(X)$ est ϵ-dense dans Y.

6. (a) D'après la question précédente, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une $\frac{1}{n}$-isométrie $f_n : S \to Y$. Comme S est dénombrable, on peut l'écrire $S = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, et on a donc pour tous les entiers naturels i et j, $|d_Y(f_n(x_i), f_n(x_j)) - d_X(x_i, x_j)| < \frac{1}{n}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n(x_i))_{n \in \mathbb{N}^*}$ du compact Y admet une suite extraite convergente. Par extraction diagonale, il existe donc un sous-ensemble infini $\mathcal{N}$ de $\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \in \mathcal{N}, n \to +\infty} f_n(x_i)$ existe. On note cette limite $f(x_i)$. Par construction, on a $d_Y(f(x_i), f(x_j)) = d_X(x_i, x_j)$.
(b) Comme X est compact, il est séparable. On peut donc trouver S partie dénombrable dense dans X. Par (a), il existe $f : S \to Y$ application isométrique. Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans l'espace compact donc complet Y, on obtient f_1 comme dans l'énoncé. La construction de f_2 est identique.
(c) On applique à $f_1 \circ f_2$ la question **0.**. On en déduit que $f_1 \circ f_2$ est surjective, donc f_1 également. Par conséquent, f_1 est l'isométrie cherchée.

II.

1. (a) On a pour tout $\epsilon > 0$, $\sup_{x \in X_0} d(x, X) = 0$, $\sup_{x \in X} d(x, X_0) \leq \epsilon$, d'où $d_{\mathrm{H}}(X_0, X) \leq \epsilon$.

2. Soit $\mathcal{R} \subset X^0 \times Y^0$ définie par $\mathcal{R} = \{(x_i, y_i); i \in I\}$. Alors $\mathcal{R}$ est une correspondance et $\mathit{dis}\,\mathcal{R} < \epsilon$ d'où $d_{\mathrm{GH}}(X^0, Y^0) < \frac{\epsilon}{2}$.

3. Il existe $N_1 = N(1)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n contienne un sous-ensemble $S_n^{(1)}$ de cardinal N_1, qui est 1-dense dans X_n, par la condition (ii) de la définition d'une suite totalement bornée. Appliquant (ii) au cran suivant, on trouve un sous-ensemble de cardinal $N(1/2)$ de chaque X_n qui est 1/2-dense. Réunissant cet ensemble au précédent, on construit pour tout entier n, $S_n^{(2)}$ de cardinal N_2, contenant $S_n^{(1)}$, sous-ensemble 1/2-dense de X_n. Procédant par récurrence, on construit N_k comme dans l'énoncé, tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n^{(k)} = \{x_{i,n}\}_{1 \leq i \leq N}$ soit un sous-ensemble $1/k$-dense de X_n. Le second point

est donc vérifié. Par l'hypothèse (i), pour tout (i,j), la suite $(d(x_{i,n},x_{j,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par D. Il existe donc une suite extraite convergente. Par procédé diagonal, on peut extraire une sous-suite qui converge pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Cela donne le second point.

4. Trivial.
5. Par définition du complété, X/d est dense dans $\overline{X}$. Si $\bar z\in\overline{X}$, il existe donc $\bar x\in X/d$ avec $\bar d(\bar x,\bar z)<\frac{1}{k}$. Si $x\in X$ est dans la classe $\bar x$, il s'écrit x_j pour un $j\in\mathbb{N}$. Or $S_n^{(k)}$ est $1/k$-dense dans X_n. Il existe donc $i\le N_k$ avec $d_n(x_{i,n},x_{j,n})<\frac{1}{k}$ pour tout n. Passant à la limite lorsque $n\to+\infty$, on obtient $d(x_i,x_j)\le\frac{1}{k}$, d'où $\bar d(\bar x_i,\bar x_j)\le\frac{1}{k}$. La conclusion en résulte.
6. Par construction $(\overline{X},\bar d)$ est complet, et par la question précédente, il est pré-compact.
7. On applique 2. à $X_0=S_n^{(k)}$, $Y_0=S^{(k)}$. On a

$$\sup_{1\le i,j\le N_k}|d_n(x_{i,n},x_{j,n})-\bar d(\bar x_i,\bar x_j)|=\sup_{1\le i,j\le N_k}|d_n(x_{i,n},x_{j,n})-d(x_i,x_j)|\to 0$$

si n tend vers l'infini. D'après 2., on en déduit $\lim_{n\to+\infty}d_{\mathrm{GH}}(S_n^{(k)},S^{(k)})=0$.
8. On a $d_{\mathrm{GH}}(X_n,\overline{X})\le d_{\mathrm{GH}}(X_n,S_n^{(k)})+d_{\mathrm{GH}}(S_n^{(k)},S^{(k)})+d_{\mathrm{GH}}(S^{(k)},\overline{X})$. D'après l'hypothèse sur $S_n^{(k)}$ et les questions II.1. et I.2, $d_{\mathrm{GH}}(X_n,S_n^{(k)})\le\frac{1}{k}$. D'après II.5, II.1. et I.2., $d_{\mathrm{GH}}(S^{(k)},\overline{X})\le\frac{2}{k}$. On a donc $d_{\mathrm{GH}}(X_n,\overline{X})\le\frac{3}{k}+d_{\mathrm{GH}}(S_n^{(k)},S^{(k)})$. On fixe k avec $\frac{3}{k}<\frac{\epsilon}{2}$, puis on utilise 7. pour prendre le dernier terme inférieur à $\frac{\epsilon}{2}$ lorsque $n\ge n_0$ assez grand.

Référence

D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov : *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, 33. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. xiv+415 pp.