FIMFA ENS Mardi 30 Novembre 2010 Durée : 2 heures

Examen partiel de Topologie et Calcul Différentiel

(Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits)

L'exercice et le problème sont indépendants.
La question 1.c de l'exercice est un peu plus difficile que les autres.

Exercice

Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, $f : E \to E'$ une application.

1. (a) Soient a un point de E. Supposons que f n'est pas continue en a. Montrer qu'il existe V voisinage ouvert de $f(a)$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de E convergeant vers a, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n)$ n'appartienne pas à V.
(b) On suppose de plus qu'il n'existe aucune suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers a, telle que la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite de terme général constant, différent de $f(a)$. Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers a, telle que pour tous $n, n' \in \mathbb{N}$ avec $n \neq n'$, on ait $f(z_n) \neq f(z_{n'})$ et $f(z_n) \notin V$.
(c) On suppose de plus que l'image de tout compact de E par f est un compact de E'. Montrer qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions de la question (b) ne peut exister.
2. Montrer que toute application $f : E \to E'$ vérifiant :
(i) Pour tout compact K de E, $f(K)$ est un compact de E',
(ii) Pour tout y dans E', $f^{-1}(y)$ est un fermé de E,
est continue sur E.

Problème

Soit X un espace topologique séparé, $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des fermés non vides de X. Si U est un ouvert de X, on note

$$s(U) = \{F \in \mathcal{F}(X); F \subset U\},\ m(U) = \{F \in \mathcal{F}(X); F \cap U \neq \emptyset\}.$$

Soit $\mathcal{T}$ la topologie sur $\mathcal{F}(X)$ dont une prébase est formée par les ensembles de la forme $m(U)$ ou $s(U)$, U décrivant les ouverts de X.

I. 1. Si $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'ouverts non vides de X, on pose

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \{F \in \mathcal{F}(X); F \subset \bigcup_{i\in I} U_i,\ \text{et pour tout } i \in I, F \cap U_i \neq \emptyset\}.$$

Montrer que lorsque $\mathcal{U}$ décrit les familles finies d'ouverts non vides de X, la famille des $\langle \mathcal{U} \rangle$ est une base d'ouverts de la topologie $\mathcal{T}$.

2. Soit $A \in \mathcal{F}(X)$. Montrer que $\mathcal{G} = \{F \in \mathcal{F}(X); F \subset A\}$ et $\mathcal{H} = \{F \in \mathcal{F}(X); F \cap A \neq \emptyset\}$ sont des fermés de $\mathcal{T}$.
3. Soit $\mathcal{I}$ (resp. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{I}_n$) l'ensemble des parties finies (resp. des parties à au plus n éléments) de X. Montrer que $\mathcal{I}$ est dense dans $\mathcal{F}(X)$ et que $\mathcal{I}_n$ est fermé.

4. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Phi_n : \qquad X^{n+1} &\to \mathcal{F}(X) \\ (x_k)_{0\leq k\leq n} &\to \{x_k; k=0,\dots,n\}\end{aligned}$$

On munit X^{n+1} de la topologie produit. Montrer que Φ_n est continue.

II. Soit Y un espace topologique, $\mathcal{A}$ une prébase d'ouverts de Y. On suppose que pour tout recouvrement ouvert de Y par des ouverts de $\mathcal{A}$, il existe un sous-recouvrement fini.

1. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de Y. Supposons que l'on ne puisse extraire de $\mathcal{U}$ aucun sous-recouvrement fini. Montrer qu'il existe $a \in Y$, un ouvert $U \in \mathcal{U}$ et $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ tels que $a \in A_1 \cap \dots \cap A_N \subset U$ et $A_j \notin \mathcal{A} \cap \mathcal{U}$ pour tout $j = 1, \dots, N$.
2. Montrer que de tout recouvrement ouvert de Y on peut extraire un sous-recouvrement fini (Indication : On raisonnera par l'absurde en montrant que si la conclusion est fausse, il existe un recouvrement duquel on ne peut extraire aucun recouvrement fini, et qui est maximal pour l'inclusion).

III. On utilise les mêmes notations et hypothèses que dans **I.**

1. Supposons de plus X régulier i.e. pour tout fermé F de X, tout point $x \in X - F$, il existe U voisinage de x, V voisinage de F avec $U \cap V = \emptyset$. Montrer que si $\mathcal{B}$ est un compact de $\mathcal{F}(X)$, alors $\bigcup_{E\in\mathcal{B}} E$ est un fermé de X.
2. On suppose que l'espace $\mathcal{F}(X)$ est compact pour la topologie $\mathcal{T}$. Montrer que X est compact.
3. On suppose dans cette question et celles qui suivent que X compact. Montrer que $\mathcal{F}(X)$ est séparé.
4. Supposons qu'il existe des familles d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_j)_{j\in J}$ telles que $\mathcal{F}(X)$ soit recouvert par $\bigcup_{i\in I} s(U_i) \cup \bigcup_{j\in J} m(V_j)$.
   (a) Montrer qu'il existe $i_0 \in I$ et un sous ensemble fini $J' \subset J$ tel que $X - U_{i_0} \subset \bigcup_{j\in J'} V_j$
   (b) Montrer que $\mathcal{F}(X)$ est recouvert par $s(U_{i_0}) \cup \bigcup_{j\in J'} m(V_j)$.
5. Montrer que $\mathcal{F}(X)$ est compact.