Examen de rattrapage de Topologie et Calcul Différentiel

(Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits)

Exercice 1

Sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on considère la relation d'équivalence suivante : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $E(x) = E(y)$ (où $E(\cdot)$ désigne la partie entière). Soit $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathcal{R}$ la projection canonique.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$ et si U est voisinage de $\pi(n)$ pour la topologie quotient, $\pi(n-1)$ est dans U.
2. Décrire tous les ouverts de $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Exercice 2

On munit $[0,1]^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Si $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_n]$, on définit

$$f_{n,P} : [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$$
$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \to P(x_0, \dots, x_n).$$

1. Montrer que X est un espace topologique compact sur lequel chaque $f_{n,P}$ est continue.
2. Montrer que la famille $(f_{n,P})_{n,P}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$, lorsque cet espace est muni de la topologie associée à la norme $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$.

Exercice 3

Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert non vide de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement.

1. Montrer que, pour tout ouvert non vide U de Ω, il existe $M \in \mathbb{R}$ et un ouvert non vide $V \subset U$, tels que pour tout $x \in V$, $f(x) \le M$.
2. Montrer que l'ensemble des points de Ω au voisinage desquels f est majorée est un ouvert dense.
3. Soit Ω un ouvert convexe de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, x_0 un point de Ω. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :
   (i) La fonction f est continue au voisinage de x_0.
   (ii) La fonction f est majorée au voisinage de x_0.
4. Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que $\Omega' = \{x \in \Omega ; f \text{ est continue en } x\}$ est un ouvert convexe.
5. Soit C un convexe non vide de E, $A \subset C$ un ouvert convexe dense dans C.
   (a) Soit $a \in \mathring{C} - A$. Montrer qu'il existe $b \in E$ et α réel strictement négatif tels que $a + b \in A$ et $a + \alpha b \in A$.
   (b) Montrer que $A = \mathring{C}$.

6. On suppose que Ω est un ouvert convexe non vide de E et que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe semi-continue inférieurement. Montrer que f est continue.

Exercice 4

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on pose $p_N(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}[(1+|n|)^N |x_n|]$. On note $\mathscr{S} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le sous-espace formé des suites telles que $p_N(x) < +\infty$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. On munit $\mathscr{S}$ des semi-normes $(p_N)_N$.

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est complet.
2. Décrire le dual topologique $\mathscr{S}'$ de $\mathscr{S}$.
3. Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}'$. On suppose que pour tout $s \in \mathscr{S}$, $\lim_{j\to+\infty} T_j(s) = \alpha_s$ existe. Montrer qu'il existe $T \in \mathscr{S}'$ telle que pour tout $s \in \mathscr{S}$, $T(s) = \alpha_s$.