Examen de topologie algébrique

- Mercredi 21 janvier 2014. Durée : 3 heures
- Pas de document. Calculatrices inutiles.
- La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note finale.

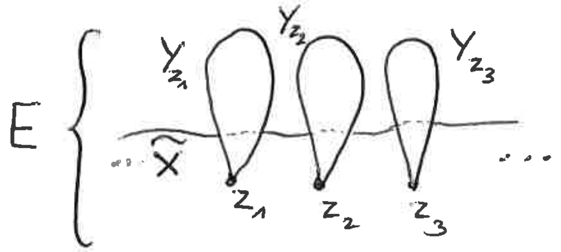
On rappelle les notations suivantes. Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel de dimension n muni de la norme euclidienne. On note D^n la boule unité, et S^{n-1} la sphère unité. On note $\overline{H}(X;R)$ l'homologie réduite d'un espace X à coefficients dans un anneau R.

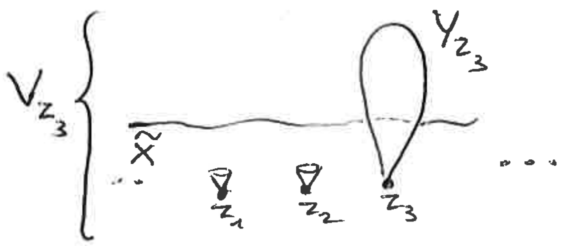
Problème 1. Groupes d'homotopie d'un bouquet.

1. **Groupes d'homotopie d'un revêtement.** Soit $p : E \to B$ un revêtement, $b \in B$ et $e \in p^{-1}(b)$. Montrez que pour $i \geq 2$, le morphisme de groupes $p_\sharp : \pi_i(E,e) \to \pi_i(B,b)$ est un isomorphisme. Que dire de $p_\sharp$ si $i = 1$?
2. **Revêtement universel d'un bouquet.** Soit (X,x) une variété topologique pointée connexe, et (Y,y) une variété simplement connexe pointée. Le but de cette question est de construire un modèle du revêtement universel du bouquet $X \vee Y$.

   (a) Justifiez pourquoi X admet un revêtement universel $p : \widetilde{X} \to X$.

   Pour chaque élément $z \in p^{-1}(x) \subset \widetilde{X}$, on se donne une copie (Y_z, y_z) de l'espace (Y,y). On note E le quotient de $\widetilde{X} \sqcup \left(\bigsqcup_{z\in p^{-1}(x)} Y_z\right)$ par la relation d'équivalence qui identifie chacun des points $z \in p^{-1}(x)$ au point y_z. On identifie $\widetilde{X}$ et chaque Y_z avec son image dans E.

   Pour tout $z \in p^{-1}(x)$, on note $\mathcal{U}_z \subset Y_z$ un voisinage qui se rétracte par déformation sur $\{y_z\}$. On définit un sous-espace $V_z \subset E$ par $V_z := \widetilde{X} \cup Y_z \cup \left(\bigcup_{t\neq z} \mathcal{U}_t\right)$ (voir dessin ci-dessus).

   (b) Montrez que pour tout sous-ensemble fini $F \subset p^{-1}(x)$, la réunion finie $\bigcup_{z\in F} V_z$ est simplement connexe.

   (c) Montrez que tout lacet de E est contenu dans une réunion finie de V_z et déduisez que E est simplement connexe.

   (d) Montrez que E est homéomorphe à l'espace total du revêtement universel de $X \vee Y$.
3. **Calculs de groupes d'homotopie.** Dans cette question, on admet le théorème de Hurewicz.

   Thm (Hurewicz). Soit $n \geq 2$. Si X est un espace pointé connexe par arcs, tel que $\pi_i(X,x)$ est trivial pour $1 \leq i < n$, alors on a un isomorphisme de groupes abéliens
   $$H_n(X;\mathbb{Z}) \simeq \pi_n(X,x)\ .$$

   (a) A l'aide du théorème de Hurewicz, calculez $\pi_i(S^n,*)$ pour $i \leq n$.

   (b) En utilisant le revêtement universel, calculez

      i. $\pi_i(\mathbb{R}P^3 \vee S^3)$ pour $i \leq 3$,

      ii. $\pi_i((S^1 \times S^1) \vee S^6)$ pour $i \leq 6$.

Problème 2. Homéomorphismes de la boule de dimension n.

Dans tout ce problème, $n \geq 1$. Pour tout espace X, on note Id_X l'application identité de X.

1. **Invariance du bord.**
   (a) Calculez l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de la paire $(D^n, D^n \setminus \{x\})$ lorsque $x \in S^{n-1}$ et lorsque $x \in D^n \setminus S^{n-1}$.
   (b) Soit ϕ un homéomorphisme de D^n. Montrez que $\phi(S^{n-1}) = S^{n-1}$.
2. **Orientation et degrés.** Soit ϕ un homéomorphisme de D^n. On dit que ϕ *préserve l'orientation* si l'application $H_n(\phi) : H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \to H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z})$ est égale à l'identité.
   (a) Montrez que ϕ préserve l'orientation si et seulement si le degré de la restriction $\phi_{|S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ est égal à 1.
   (b) Soit $f \in O_n(\mathbb{R})$. Montrez que l'homéomorphisme de D^n induit par f préserve l'orientation si et seulement si $\det(f) = 1$.
3. **Isotopies et orientation.** Soit X un espace topologique. Deux homéomorphismes $\phi, \psi : X \to X$ sont isotopes s'il existe une application continue $H : X \times I \to X$ telle que $H(x,0) = \phi(x)$ et $H(x,1) = \psi(x)$ pour tout $x \in X$, et telle que pour tout t, l'application $H(-,t) : X \to X$ est un homéomorphisme.
   (a) Soit ϕ un homéomorphisme de D^n, isotope à Id_{D^n}. Montrez que ϕ préserve l'orientation.
   (b) On s'intéresse à la réciproque de la question précédente pour $n = 2$. Soit ϕ un homéomorphisme de D^2 qui préserve l'orientation.
      i. Montrez que la restriction $\phi_{|S^1} : S^1 \to S^1$ est un homéomorphisme isotope à Id_{S^1}.
      ii. Déduisez-en que ϕ est isotope à un homéomorphisme ψ qui préserve le bord, c'est-à-dire tel que $\psi(x) = x$ pour tout $x \in S^1$.
      iii. Montrez que ψ est isotope à Id_{D^2} (on pourra utiliser l'application $H(x,t) = t\psi(x/t)$ si $0 \leq ||x|| < t$ et $H(x,t) = x$ sinon). Conclure.

Problème 3. Homologie d'un complémentaire

1. **Espaces finis.** Un espace X est fini si pour tout anneau principal R, s'il existe un entier n tel que les R-modules d'homologie singulière $H_i(X; R)$ sont nuls pour $i > n$ et sont des R-modules de type fini pour $i \leq n$. Si X est un espace fini et $\Bbbk$ est un corps, on pose

$$\overline{\chi}(X, \Bbbk) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\Bbbk} \overline{H}_i(X; \Bbbk) .$$

   (a) Soit K un complexe simplicial géométrique *fini*(c'est à dire que K est un ensemble fini de simplexes) de dimension n, et soit $|K| = \cup_{\sigma \in K} S$ le polyèdre associé.
      i. Montrez que $|K|$ est un espace fini.
      ii. Soit k_i le nombre de simplexes de dimension i de K. Montrez que pour tout corps $\Bbbk$:

$$\overline{\chi}(|K|, \Bbbk) = \left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i k_i \right) - 1.$$

   (b) Soient X, Y, Z trois espaces. On suppose que pour tout anneau principal R, on a une suite exacte longue :

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \overline{H}_i(X; R) \to \overline{H}_i(Y; R) \to \overline{H}_i(Z; R) \xrightarrow{\partial} \overline{H}_{i-1}(X; R) \to \ldots$$
$$\cdots \to \overline{H}_1(Z; R) \xrightarrow{\partial} \overline{H}_0(X; R) \to \overline{H}_0(Y; R) \to \overline{H}_0(Z; R) \to 0 .$$

i. Montrez que si deux des trois espaces X, Y, Z sont finis, alors le troisième est fini.

ii. Montrez que si les trois espaces X, Y, Z sont finis, alors pour tout corps $\Bbbk$, on a

$$\overline{\chi}(X;\Bbbk) + \overline{\chi}(Z;\Bbbk) = \overline{\chi}(Y;\Bbbk) \,.$$

(c) Soit X un espace fini quelconque. Montrez que $\overline{\chi}(X,\Bbbk)$ ne dépend pas du corps $\Bbbk$.

2. **Homologie d'un complémentaire.** On rappelle un résultat du cours :

Thm :
(A) Soit D un sous-espace de S^n homéomorphe à D^k. Alors $\overline{H}_i(S^n \setminus D;\mathbb{Z}) = 0$ pour tout $i \geq 0$.
(B) Soit S un sous-espace de S^n homéomorphe à S^k, pour $k < n$. Alors $\overline{H}_i(S^n \setminus S;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si $i = n - k - 1$ et 0 sinon.

Soit K un complexe simplicial géométrique *fini* de dimension k. On suppose qu'on a un plongement $f : |K| \hookrightarrow S^n$ pour $k \leq n$. Dans la suite on identifie $|K|$ et $f(|K|)$.

(a) Soit σ un simplexe de dimension k de K et soit $L = K \setminus \sigma$.

i. En utilisant la suite de Mayer-Vietoris, montrez qu'on a pour tout anneau R une suite exacte longue

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \overline{H}_i(S^n \setminus |K|;R) \to \overline{H}_i(S^n \setminus |L|;R) \to \overline{H}_i(S^n \setminus (|L| \cap \sigma);R) \xrightarrow{\partial} \overline{H}_{i-1}(S^n \setminus |K|;R) \to \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{\partial} \overline{H}_0(S^n \setminus |K|;R) \to \overline{H}_0(S^n \setminus |L|;R) \to \overline{H}_0(S^n \setminus (|L| \cap \sigma);R) \to 0 \,.$$

ii. Justifiez que $|L| \cap \sigma$ est homéomorphe à S^{k-1}.

(b) Montrez par récurrence sur le nombre de simplexes de K, que $S^n \setminus |K|$ est un espace fini.

(c) Montrez que $\overline{\chi}(S^n \setminus |K|;\Bbbk) = (-1)^{n-1}\overline{\chi}(|K|;\Bbbk)$ pour tout corps $\Bbbk$.

(d) Montrez que $\overline{H}_i(S^n \setminus |K|;R) = 0$ si $i \geq n$ ou si $i < n - 1 - k$.