

Corrigé de l'examen de topologie algébrique

Exercice I (1) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons C_i le i -ème espace de chaînes cellulaires à coefficients réels de X , Z_i son sous-espace vectoriel des i -cycles, et B_i son sous-espace vectoriel des i -bords. Notons z_i et b_i la dimension de Z_i et de B_i . Posons $b_{-1} = 0$ et rappelons les conventions $C_{-1} = \{0\}$ et $\partial_0 = 0$. Par le théorème du rang appliqué à l'opérateur bord $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$, nous avons $c_i = z_i + b_{i-1}$ (y compris pour $i = 0$). Puisque $H_i(X; \mathbb{R}) = Z_i/B_i$, nous avons $h_i = z_i - b_i$. Posons $B(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i t^i$, qui est un polynôme, car $b_i = 0$ si i est strictement supérieur à la dimension de X , et dont les coefficients sont dans \mathbb{N} , donc sont positifs ou nuls. Comme $b_{-1} = 0$, il est immédiat de vérifier que

$$C(t) - H(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (b_{i-1} + b_i) t^i = (t + 1)B(t).$$

(2) Comme $c_i - h_i = b_{i-1} + b_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, le résultat s'en déduit par sommation alternée entre $i = 0$ et $i = k$, car

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i c_{k-i} - \sum_{i=0}^k (-1)^i h_{k-i} = b_k - b_{-1} = b_k \geq 0.$$

Exercice II L'anneau des coefficients est \mathbb{Z} dans cet exercice.

(1) Par construction, X admet une structure de CW-complexe fini ayant une cellule de dimension 0 égale au point x , une cellule de dimension n attachée par l'application constante sur x , et k cellules de dimension $n + 1$, attachées sur le n -squelette, qui est la sphère \mathbb{S}_n , par des applications d'attachement de degré d_1, \dots, d_k .

Si $n \geq 2$, le 1-squelette de X est donc réduit à un point, et puisque le groupe fondamental du 1-squelette se surjecte sur le groupe fondamental de X , nous avons $\pi_1(X, x) = 0$. Si $n = 1$, alors le 1-squelette est un cercle, de groupe fondamental isomorphe à \mathbb{Z} , et le groupe fondamental de X est le quotient du sous-groupe fondamental du 1-squelette par le sous-groupe (distingué car abélien) engendré par les images des applications induites sur le groupe fondamental par les applications d'attachement des deux cellules. Donc si $(d_1, \dots, d_k) = (0, \dots, 0)$, alors $\pi_1(X, x) \simeq \mathbb{Z}$. Sinon, $\pi_1(X, x) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ où $d = \text{pgcd}(d_1, \dots, d_k)$.

Le complexe de chaînes cellulaires (D_*, ∂_*) de X est, en utilisant les bases canoniques des D_p ,

$$0 \xleftarrow{\partial_0} D_0 = \mathbb{Z} \leftarrow 0 \cdots \leftarrow 0 \xleftarrow{\partial_n} D_n = \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_{n+1}} D_{n+1} = \mathbb{Z}^k \xleftarrow{\partial_{n+2}} 0 \cdots$$

L'application ∂_n est nulle (y compris si $n = 1$, car l'application d'attachement de la n -cellule est constante (en x)), et l'application ∂_{n+1} est $(x_1, \dots, x_k) \mapsto \sum_{i=1}^k d_i x_i$.

Si $(d_1, \dots, d_k) = (0, \dots, 0)$, alors ∂_{n+1} est l'application nulle, donc

$$H_p(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ \mathbb{Z}^k & \text{si } p = n + 1 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Si $(d_1, \dots, d_k) \neq (0, \dots, 0)$, alors l'image de ∂_{n+1} est le sous-groupe infini cyclique engendré par $d = \text{pgcd}(d_1, \dots, d_k)$, donc

$$H_p(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ \mathbb{Z}^{k-1} & \text{si } p = n + 1 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

(2) Quitte à écraser en un point un arbre maximal dans le 1-squelette de X_i (qui est un graphe connexe, par connexité de X_i), ce qui ne change pas le type d'homotopie de X_i , donc pas le type d'homologie, nous pouvons supposer que X_i n'a qu'un seul sommet. Par définition de la topologie des sommes pointées, l'espace X admet une structure évidente de CW-complexe, dont le k -squelette est la somme pointée des k -squelettes des X_i . En notant $(D_k(Y), \partial_k(Y))_{k \in \mathbb{N}}$ le complexe des chaînes cellulaires d'un CW-complexe Y , nous avons donc $D_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ et pour $k \geq 1$, $D_k(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} D_k(X_i)$ et $\partial_k(Y) = \bigoplus_{i \in I} \partial_k(X_i)$. Notons que ∂_1 est l'application nulle, car les applications d'attachement des 1-cellules sont constantes (en x). En raisonnant par blocs, le résultat est alors immédiat.

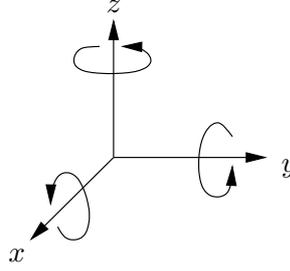
(3) a) Par le théorème de classification des groupes abéliens de type fini, il existe des entiers $m, r \in \mathbb{N}$ et $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tels que $G \simeq \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$. Pour tout $d \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, il existe une application continue de degré d de \mathbb{S}_n dans \mathbb{S}_n , il suffit par exemple de prendre la suspension $d-2$ -fois itérée de l'application du cercle dans lui-même de multiplication par d de l'angle.

Par la question (1) en prenant $k = 1$, il existe des CW-complexes finis connexes à un seul sommet X_1, \dots, X_{m+r} tels que $H_p(X_i) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour $1 \leq i \leq m$ (en fait $X_i = \mathbb{S}_n$ convient alors : la sphère \mathbb{S}_n est un espace de Moore $M(\mathbb{Z}, n)$) et $H_p(X_{m+i}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour $1 \leq i \leq r$, pour tout $p \geq 1$. En pointant X_i en son sommet, et en notant X la somme pointée des X_i pour $1 \leq i \leq m+r$, X est un CW-complexe fini connexe donc compact et connexe par arcs, et le résultat découle alors de la question (2).

b) L'espace $\bigvee_{p \in \mathbb{N} - \{0\}} M(G_p, p)$ convient, par la question (2).

Exercice III Pour ceux que les formules rassurent, les vissages considérés sont

$$\begin{aligned}
v_x &: (a, b, c) \mapsto (a + 2, -c, b), \\
v_y &: (a, b, c) \mapsto (c, b + 2, -a), \\
v_z &: (a, b, c) \mapsto (-b, a, c + 2).
\end{aligned}$$



(1) a) Notons que $w_x = v_x^4$ et $w_y = v_y^4$ sont des translations, donc commutent, et que $v_z w_x v_z^{-1} = w_y$ et $v_z w_y v_z^{-1} = w_x^{-1}$. Donc tout élément de Γ' , qui est un mot en $w_x^\pm, w_y^\pm, v_z^\pm$, peut s'écrire $\gamma_{p,q,r} = w_x^p w_y^q v_z^r$ avec $p, q, r \in \mathbb{Z}$, en permutant les w_x^\pm et w_y^\pm , et en regroupant les termes v_z^\pm à droite en utilisant les fomules ci-dessus pour les faire passer vers la droite au-dessus des termes en w_x^\pm et w_y^\pm .

b) Remarquons que l'application $v_x \circ v_z \circ v_y$, qui appartient à Γ , est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de la droite orientée de $(1, -1, 1)$ à $(1, -1, -1)$. La projection canonique π n'est donc pas un homéomorphisme local au voisinage d'un point de cette droite (car non localement injective), donc n'est pas un revêtement.

Montrons que l'action de Γ' sur \mathbb{R}^3 est propre et libre, ce qui implique que π' est un revêtement.

La troisième coordonnée de l'image de (a, b, c) par $\gamma_{p,q,r}$ est $c + 2r$, donc si (a, b, c) est un point fixe de $\gamma_{p,q,r}$, alors $r = 0$. et comme $w_x^p w_y^q$ est la translation de vecteur $(8p, 8q, 0)$, le point (a, b, c) n'est fixe par $\gamma_{p,q,r}$ que si $p = q = 0$, c'est-à-dire si $\gamma_{p,q,r}$ vaut l'identité. Donc l'action de Γ' est libre.

Une analyse semblable montre que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments $\gamma \in \Gamma'$ tels que $\gamma[-N, N]^3 \cap [-N, N]^3$ soit non vide. Mais nous donnons ci-dessous un argument moins analytique, dont une partie reservira plus loin.

Remarquons que le pavage \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 par les images du cube $C = [-1, +1]^3$ par les translations de vecteurs à coefficients entiers pairs est préservé par v_x, v_y, v_z , car il est invariant par les translations à coefficients entiers pairs et par les rotations d'angle $\pi/2$ autour des axes de coordonnées. Donc \mathcal{P} est invariant par le groupe d'isométries préservant l'orientation Γ , donc par Γ' . De plus, Γ agit transitivement sur les cubes de \mathcal{P} , car en utilisant $v_x^\pm, v_y^\pm, v_z^\pm$, nous pouvons envoyer C sur chacun de ses six voisins, et par connexité du graphe dual des cubes de \mathcal{P} . L'orbite de l'origine O par Γ est donc le réseau des points à coordonnées entières paires.

Ceci implique que l'action de Γ' est propre. Sinon, il existerait une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de Γ' tels que la suite $(\gamma_n O)_{n \in \mathbb{N}}$ resterait dans un borné, donc convergerait quitte à extraire. Donc pour n, m assez grands et distincts, $d(\gamma_n O, \gamma_m O) < \frac{1}{2}$ et $\gamma_n O = \gamma_m O$, ce qui contredit le fait que l'action soit libre.

(2) L'espace X' est connexe par arcs, car quotient d'un espace connexe par arcs. Si X' et \mathbb{T}^3 avaient le même type d'homotopie, leurs groupes fondamentaux seraient isomorphes. Or comme \mathbb{R}^3 est simplement connexe, le groupe fondamental de X' est isomorphe à Γ' , et le groupe fondamental de $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ est isomorphe à \mathbb{Z}^3 , qui est abélien. Or nous avons vu que $v_z v_x^4 \neq v_x^4 v_z$, par exemple, donc Γ' n'est pas abélien, et ne peut être isomorphe à \mathbb{Z}^3 .

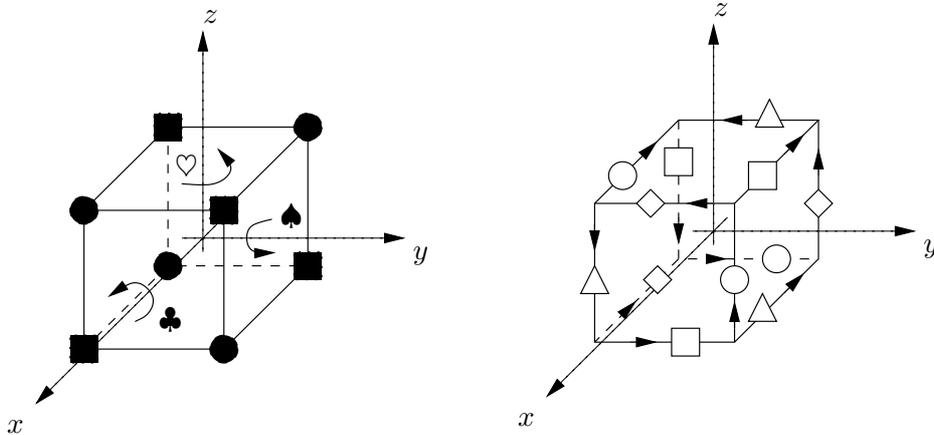
Le sous-groupe H de Γ' engendré par v_x^4, v_y^4, v_z^4 est le groupe des translations par les vecteurs à coordonnées entières multiples de 8. Donc $H \backslash \mathbb{R}^3$ est homéomorphe au tore \mathbb{T}^3 , et en particulier est compact. Par la théorie des revêtements, l'application canonique $H \backslash \mathbb{R}^3 \rightarrow X' = \Gamma' \backslash \mathbb{R}^3$ est un revêtement, nécessairement fini par compacité de $H \backslash \mathbb{R}^3$, ce qui répond à la seconde question.

L'application ν qui à une transformation affine associe sa partie vectorielle définit une suite exacte de groupes

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Isom}_+(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\nu} \text{SO}(3) \rightarrow 1,$$

où $\text{Isom}_+(\mathbb{R}^3)$ est le groupe des isométries affines euclidiennes de \mathbb{R}^3 préservant l'orientation. Par ν , le groupe Γ' se surjecte sur le groupe engendré par la rotation vectorielle d'angles $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe des z . Ce groupe-ci est fini, d'ordre 4, et le noyau de $\nu|_{\Gamma'}$ est le groupe H ci-dessus. En particulier, l'indice de H dans Γ' est 4. Le nombre de feuilletés cherché est donc 4. En effet, nous avons construit un revêtement à 4 feuilletés isomorphe au tore ci-dessus. De plus, par le théorème de classification des revêtements, puisque π' est un revêtement universel de X' , tout revêtement fini connexe de X' est isomorphe au revêtement défini par un sous-groupe d'indice fini H' de Γ' , et si l'indice de H' est strictement plus petit que 4, alors la restriction de ν à H' ne peut pas être triviale, et H' , qui est sans torsion car Γ' l'est, n'est pas abélien.

(3) Par transitivité de l'action de Γ sur les cubes de \mathcal{P} , la restriction de π au cube C induit un homéomorphisme de X avec le quotient de C par la relation d'équivalence engendrée par $u \sim v_x(u)$ si $u \in \{-1\} \times [-1, 1]^2$, $u \sim v_y(u)$ si $u \in [-1, 1] \times \{-1\} \times [-1, 1]$ et $u \sim v_z(u)$ si $u \in [-1, 1]^2 \times \{-1\}$. On vérifie facilement que cette relation d'équivalence a deux classes sur les sommets de C , quatre classes sur les arêtes, et trois classes sur les faces (celles $\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit$ dont les centres sont respectivement $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$). Donc la restriction de π à chaque représentant de ces classes définit une structure de CW-complexe sur X , ayant 2 sommets, 4 arêtes, 3 cellules de dimension 2, et 1 cellule de dimension 3. Voir les dessins ci-dessous. Par construction, π envoie le k -squelette de \mathcal{P} dans le k -squelette de X , donc est cellulaire.



(4) Par la formule d'Euler, la caractéristique d'Euler $\chi(X)$ de X est donc $\chi(X) = 2 - 4 + 3 - 1 = 0$. Mais on peut aussi utiliser le fait que la caractéristique d'Euler d'un revêtement à n feuillets de X est $n\chi(X)$ (car un revêtement à n feuillets d'un CW-complexe fini Y hérite d'une structure de CW-complexe fini, par le théorème du relèvement, ayant $n \times n_k$ cellules de dimension k si Y possède n_k cellules de dimension k). Comme X admet un revêtement fini de caractéristique d'Euler nulle (le tore \mathbb{T}^3 , encore faut-il savoir ceci), le résultat en découle.

(5) Notons D_k le groupe des k -chaînes cellulaires de X . Comme base de $D_0 \simeq \mathbb{Z}^2$, choisissons les sommets $(1,1,1)$ et $(1, -1, 1)$. Comme base de $D_1 \simeq \mathbb{Z}^4$, choisissons les arêtes de la face $\{1\} \times [-1, 1]^2$ orientées dans le sens trigonométrique, la première étant celle entre $(1, 1, -1)$ et $(1, 1, 1)$. Comme base de $D_2 \simeq \mathbb{Z}^3$, choisissons les faces $\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit$ orientées par la normale sortante du cube. Le complexe des chaînes cellulaires de X est

$$0 \xleftarrow{\partial_0} \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^4 \xleftarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xleftarrow{\partial_3} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_4} 0 \dots$$

où ∂_0 et ∂_i pour $i \geq 4$ sont les applications nulles. Nous avons $\partial_3 = 0$ car les faces sont recollées (deux à deux) par translations, donc avec des orientations par la normale sortante opposées. En regardant le dessin ci-dessus (et en faisant bien attention à l'orientation des arêtes et au sens de parcours des bords des faces), nous avons

$$\partial_1 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4)$$

et

$$\partial_2 : (y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1 - y_2 - y_3, y_1 + y_2 - y_3, y_1 + y_2 + y_3, y_1 - y_2 + y_3) .$$

Donc $H_i(X) = 0$ si $i \geq 4$ (car X est un CW-complexe de dimension 3), $H_3(X) = \ker \partial_3 / \text{im } \partial_4 \simeq \mathbb{Z}$, $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ car X est connexe par arcs, $H_2(X) = \ker \partial_2 / \text{im } \partial_3 = 0$ car ∂_2 est injective, et enfin $H_1(X) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 = 0$ car le noyau de ∂_1 , qui est le sous-groupe d'équation $x_1 - x_2 + x_3 - x_4$, est égal à l'image de ∂_2 .

Exercice IV (1) a) Par functorialité, $\text{id}_* = \text{id}$ et la trace de l'identité d'un espace vectoriel de dimension finie est égale à la dimension de cet espace. Donc l'indice de Lefschetz de f est égal à la caractéristique d'Euler de X :

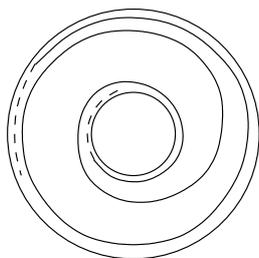
$$L(\text{id}) = \chi(X) .$$

b) Comme les seuls groupes d'homologie non nuls de la sphère \mathbb{S}_n sont en degré 0 et n , et sont égaux à \mathbb{R} , et puisque f induit en homologie l'identité en degré 0 et la multiplication par d en degré n (c'est la définition lorsque l'anneau des coefficients est \mathbb{Z} ; le résultat est encore valable lorsqu'il est \mathbb{R} , en tensorisant par \mathbb{R} le complexe des chaînes singulières à coefficients \mathbb{Z} , dont les groupes sont abéliens libres), nous avons donc

$$L(f) = 1 + (-1)^n d .$$

(2) Par la propriété d'invariance homotopique de l'homologie, les applications f_* et g_* de $H_k(X)$ dans $H_k(X)$ sont égales pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en particulier $t_k(f) = t_k(g)$. Donc par définition $L(f) = L(g)$.

(3) a) L'espace Y possède trois composantes connexes par arcs, l'une homéomorphe à \mathbb{R} (donc contractile) par le plongement $\theta \mapsto (2 + \tanh \theta)e^{i\theta}$, les deux autres homéomorphes à un cercle.



Comme les groupes d'homologie du cercle sont bien connus, et comme les groupes d'homologie d'un espace sont les sommes directes des groupes d'homologie de ses composantes connexes par arcs, nous avons donc

$$H_k(Y) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

b) L'espace Y est un fermé (car la spirale s'accumule sur les deux cercles de rayons 1 et 3), borné donc compact. Il est connexe, car c'est l'adhérence de la spirale, qui est connexe car homéomorphe à \mathbb{R} (théorème de l'arbre et de l'écorce ...) Considérons l'application $f : Y \rightarrow Y$ qui vaut la rotation d'angle 1 radian sur les deux cercles, et qui vaut la translation $\theta \mapsto \theta + 1$ du paramètre de la spirale sur celle-ci. C'est clairement un homéomorphisme sans point fixe, qui induit l'identité sur tous les groupes d'homologie. Donc $L(f) = +3 - 2 = 1 \neq 0$.

(4) a) Soit \tilde{C} un supplémentaire de $i(A)$ dans B , de sorte que j induit un isomorphisme de \tilde{C} dans C . Par commutativité du diagramme, β envoie $i(A)$ dans lui-même. Le résultat est immédiat en considérant la matrice par blocs de β dans la décomposition $B = i(A) \oplus \tilde{C}$, car $\text{trace}(ghg^{-1}) = \text{trace}(h)$ si g est un isomorphisme linéaire, $\beta|_{i(A)} = i \circ \alpha \circ i^{-1}|_{i(A)}$, et $j|_{\tilde{C}} \circ \beta \circ (j|_{\tilde{C}})^{-1} = \gamma$.

b) Notons D_i, B_i, Z_i, H_i les espaces vectoriels réels de dimension finie des i -chaînes cellulaires, des i -cycles cellulaires, des i -bords cellulaires, et le i -ème espace d'homologie cellulaire de X . L'application f induit des morphismes de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & B_i & \rightarrow & Z_i & \rightarrow & H_i & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & B_i & \rightarrow & Z_i & \rightarrow & H_i & \rightarrow & 0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & Z_i & \rightarrow & D_i & \rightarrow & B_{i-1} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & Z_i & \rightarrow & D_i & \rightarrow & B_{i-1} & \rightarrow & 0 . \end{array}$$

Puisque l'homologie cellulaire est naturellement isomorphe à l'homologie singulière, puisque $\text{trace}(ghg^{-1}) = \text{trace}(h)$ si g est un isomorphisme linéaire, en appliquant la question a) et par sommation alternée, le résultat s'en déduit.

c) L'hypothèse implique que la matrice de $f_* : D_k \rightarrow D_k$ dans la base canonique de D_k définie par les k -cellules de X est à coefficients diagonaux nuls, donc de trace $t'_k(f)$ nulle. Par la question b), ceci implique que $L(f) = 0$.

(5) a) La preuve la plus classique est de dire que si f n'a pas de point fixe, alors l'application de $\mathbb{S}_n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_n$ définie par $(x, t) \mapsto \frac{(1-t)f(x)-tx}{\|(1-t)f(x)-tx\|}$ est une homotopie (le dénominateur ne s'annulant pas, sa continuité est claire) entre f et l'antipodie, et d'appliquer la question (2). Mais nous donnons une preuve utilisant les questions précédentes, qui peut servir plus généralement.

Par la question (1) b), l'indice de Lefschetz d'une application continue de \mathbb{S}_n dans \mathbb{S}_n de degré d , qui vaut $1 + (-1)^n d$, est nul si et seulement si $d = (-1)^{n+1}$, qui est le degré de l'antipodie. Par compacité de \mathbb{S}_n , si f est sans point fixe, alors il existe une cellulation finie suffisamment fine telle que pour toute cellule c , son image $f(c)$ soit à distance au moins 2ϵ de c . Par le résultat d'approximation admis, si f est sans point fixe, il existe donc une cellulation de \mathbb{S}_n et une application g homotope à f telle que $g(c) \cap c$ soit vide pour toute cellule c . Par la question (2), ceci implique donc que f , qui vérifie $L(f) = L(g) = 0$, est de même degré que l'antipodie, ce qui montre la contraposée du résultat voulu.

b) Le résultat se montre de même, en remarquant que si f est homotope à l'identité, alors $L(f) = L(\text{id})$ par la question (2), que $L(\text{id}) = \chi(X)$ par la question (1) a), et que la caractéristique d'Euler d'une surface compacte connexe orientable de genre $g \geq 2$ est $2 - 2g$, qui est strictement négative, donc non nulle.