Corrigé du partiel de topologie algébrique

Exercice I (1) a) Les applications $h_1 : [0,1]\times[0,\frac{1}{2}] \to X$ et $h_2 : [0,1]\times[\frac{1}{2},1] \to X$ définies par $(s,t) \mapsto \alpha((1+s)t) * \beta((1-s)t)$ et $(s,t) \mapsto \alpha((1-s)t+s) * \beta((1+s)t-s)$ sont bien définies sur deux fermés du carré $[0,1]^2$, de réunion $[0,1]^2$, et continues par compositions d'applications continues. Elles coïncident sur l'intersection $[0,1] \times \{\frac{1}{2}\}$ de ces deux fermés (elles valent toutes deux $\alpha(\frac{1+s}{2}) * \beta(\frac{1-s}{2})$ en $(s,\frac{1}{2})$). Donc h est continue.

De même, h' est bien définie et continue sur trois fermés du carré $[0,1]^2$, de réunion $[0,1]^2$, et les définitions de h coïncident sur les intersections deux à deux de ces fermés. Donc h' est continue.

b) Soient α et β deux lacets d'origine e. Remarquons que $t \mapsto \alpha(t) * \beta(t)$ est bien un lacet d'origine e, par composition d'applications continues et car $e * e = e$. Notons $\alpha' : t \mapsto \alpha(t) * e$ et $\beta' : t \mapsto e * \beta(t)$, qui sont deux lacets en e, homotopes (en tant que lacets) aux lacets α et β respectivement, par la propriété de H-espace. L'application h définie en a) est une homotopie entre l'application $t \mapsto h(0,t) = \alpha(t)*\beta(t)$ et l'application $t \mapsto h(1,t) = (\alpha' \cdot \beta')(t)$, qui est homotope à la concaténation des lacets α et β. De plus $h(s,0) = e*e = e$ et $h(s,1) = e*e = e$ pour tout $s \in [0,1]$. Par composition des homotopies de lacets, les lacets $\alpha \cdot \beta$ et $t \mapsto \alpha(t) * \beta(t)$ sont donc homotopes. Par définition du produit dans le groupe fondamental, le résultat en découle.

c) Soient α et β deux lacets d'origine e. Notons respectivement α' et β' les lacets $t \mapsto e * \big(\beta(t) * (e * \overline{\beta}(t))\big)$ et $t \mapsto \alpha(t) * \big(e * (\overline{\alpha}(t) * e)\big)$ d'origine e (car $e * (e * (e * e)) = e$). Par la propriété de H-espace, par le fait que $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ est homotope au lacet constant en e et par composition des homotopies, ces deux lacets sont homotopes au lacet constant en e. L'application h' définie en a) est une homotopie entre d'une part l'application $t \mapsto h'(0,t) = \alpha(t)*\big(\beta(t)*(\overline{\alpha}(t)*\overline{\beta}(t))\big)$, qui est homotope à la concaténation de lacets $\alpha\cdot\beta\cdot\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ par la question b), et d'autre part l'application $t \mapsto h'(1,t) = (\alpha' \cdot \beta')(t)$, qui est homotope à la concaténation de deux lacets constants en e, donc au lacet constant en e. De plus $h'(s,0) = e * (e * (e * e)) = e$ et $h'(s,1) = e * (e * (e * e)) = e$. Donc $\alpha \cdot \beta \cdot \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$ est homotope (en tant que lacet) au lacet constant. Par définition du produit dans le groupe fondamental, le commutateur $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ de deux éléments quelconques du groupe fondamental de X (de point base e) est donc trivial, et $\pi_1(X,e)$ est abélien.

(2) a) Puisque $f(x)$ est le point base y de Y, nous avons $\Omega f(\varepsilon_x) = \varepsilon_y$. Montrons que Ωf est continue en tout point α_0 de $\Omega(X)$. Puisque Y est séparé, l'image de α_0 est compacte, et un argument de continuité uniforme implique alors que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \alpha_0([0,1])$, si $d(y,x) \leq \eta$, alors $d(f(y), f(x)) \leq \epsilon$. Par définition de la topologie de la convergence uniforme, si α est suffisamment proche de α_0, alors $\sup_{t\in[0,1]} d(\alpha(t), \alpha_0(t)) \leq \eta$. Donc $\sup_{t\in[0,1]} d(f \circ \alpha(t), f \circ \alpha_0(t)) \leq \epsilon$, ce qui montre le résultat cherché. Si α est un lacet de X, alors $\mathrm{id} \circ\alpha = \alpha$ et $(f \circ g) \circ \alpha = f \circ (g \circ \alpha)$. Donc $\Omega\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$ et $\Omega(f \circ g) = (\Omega f) \circ (\Omega g)$, et Ω est bien un foncteur.

Si $h : X \times [0,1] \to Y$ est une application continue, alors l'application de $\Omega(X) \times [0,1]$ dans $\Omega(Y)$ définie par $(\alpha, s) \mapsto \{t \mapsto h(\alpha(t), s)\}$ est encore continue, par le même argument que ci-dessus. Donc si deux applications $\phi : X \to Y$ et $\psi : X \to Y$ sont homotopes, alors $\Omega\phi : \Omega(X) \to \Omega(Y)$ et $\Omega\psi : \Omega(X) \to \Omega(Y)$ sont aussi homotopes. Si X et Y ont le même type d'homotopie, soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications continues telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes aux applications identités de Y et X respectivement. Par ce qui précède, $(\Omega f) \circ (\Omega g) = \Omega(f \circ g)$ est donc homotope à $\Omega\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$, et de même pour $(\Omega g) \circ (\Omega f)$. Donc $\Omega(X)$ et $\Omega(Y)$ ont le même type d'homotopie.

b) La concaténation $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_x$ est encore égale au lacet constant en x, et pour tout lacet α en x, les concaténations $\alpha \cdot \varepsilon_x$ et $\alpha \cdot \varepsilon_x$ sont homotopes à α par une homotopie qui dépend continuement de α, par une propriété vue en cours (pour démontrer que la classe d'homotopie du lacet ε_x est l'élément neutre du groupe fondamental) : il suffit de prendre

$$(\alpha, s) \mapsto \left(t \mapsto \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{1+s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ e & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \right).$$

Donc $\Omega(X)$ est un H-espace. La commutativité de $\pi_i(X)$ pour $i \geq 2$ découle alors, par récurrence, de la question (1) c). Si X est contractile, alors X a le même type d'homotopie que le singleton $\{x\}$, et donc $\Omega(X)$ a le même type d'homotopie que $\Omega(\{x\})$, qui est réduit à un point (le lacet constant en x !). Donc $\Omega(X)$ est contractile si X est contractile. Or le groupe fondamental d'un espace contractile est trivial. Par récurrence, nous avons donc $\pi_i(X) = \{1\}$ si X est contractile, pour tout $i \geq 0$ ($\pi_0(X)$ est un singleton, car X est connexe par arcs.

(3) a) Un groupe topologique, pointé en son élément neutre, est évidemment un H-espace. Donc son groupe fondamental est abélien, par la question (1) c).

b) Le noyau d'un morphisme de groupes est toujours distingué, et comme $\mathrm{Ker}\,\pi$ est la fibre d'un revêtement, il est discret. Pour tout $\gamma \in \mathrm{Ker}\,\pi$, l'application continue de G dans $\mathrm{Ker}\,\pi$ définie par $g \mapsto g\gamma g^{-1}$ est de source connexe et d'image discrète, donc est constante, et vaut $e\gamma e^{-1} = \gamma$. Donc γ commute avec tout élément de G, et $\mathrm{Ker}\,\pi$ est central.

Pour tout $\gamma \in \mathrm{Ker}\,\pi$, l'application $\lambda_\gamma : g \mapsto \gamma g$ de G dans G est un homéomorphisme et $\pi(\gamma g) = \pi(g)$. Donc $\gamma \mapsto \lambda_\gamma$ est un morphisme de $\mathrm{Ker}\,\pi$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(\pi)$ des automorphismes de revêtements de π. Comme un groupe agit transitivement sur lui-même par translations à gauche, le groupe $\mathrm{Aut}(\pi)$ agit transitivement sur la fibre au-dessus de e, et π est galoisien.

c) Soit N le noyau de φ, qui est fini, car discret dans un compact. La projection canonique $G \to G/N$ est donc un revêtement. L'application φ induit par passage au quotient une bijection continue, entre les espaces compacts G/N (car séparé par fermeture de N et image du compact G par la projection canonique) et H. te bijection continue est donc un homéomorphisme, et par conséquent φ est un revêtement.

(4) a) Le groupe $\mathrm{SU}(2)$ agit linéairement sur $\mathbb{C}^2$ en préservant le produit scalaire hermitien usuel, donc en préservant la sphère unité $\mathbb{S}_3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \;:\; |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Cette action est transitive par le théorème de Witt (ou tout simplement parce que pour tout $(z, w) \in \mathbb{S}_3$, la matrice $\begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{SU}(2)$, et envoie $(1, 0)$ sur (z, w)). Elle est libre car le stabilisateur de $(1, 0)$ est trivial : tout élément de $\mathrm{SU}(2)$ fixant ce vecteur doit préserver l'orthogonal, donc être diagonal, et la condition de déterminant 1 conclut. Donc l'application $x \mapsto x \cdot (1, 0)$ est une bijection continue entre deux espaces compacts, donc un homéomorphisme de $\mathrm{SU}(2)$ sur $\mathbb{S}_3$.

b) Notons que V est un espace vectoriel réel de dimension 3, car

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} ia & b \\ -\overline{b} & -ia \end{pmatrix} \;:\; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Pour tous $v, v' \in V$, notons $\langle v \,|\, v' \rangle = \operatorname{Trace}(v^* v') = -\operatorname{Trace}(vv') = -\operatorname{Trace}(v'v)$, de sorte que $\langle v \,|\, v \rangle$ soit la somme des carrés des modules des coefficients de v. C'est donc un produit scalaire euclidien. Par les propriétés de la trace et le fait que l'inverse d'un élément de SU(2) est sa transconjuguée, l'action par conjugaison de SU(2) sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ préserve V, et préserve ce produit scalaire euclidien. L'action induit donc un morphisme φ de SU(2) dans O(3), le groupe des isométries euclidiennes vectorielles de V. Comme SU(2) est connexe, son image est contenu dans la composante connexe de l'élément neutre de O(3), qui est SO(3). Si g appartient au noyau de φ, alors g commute avec tout élément de V. Donc g commute avec $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in V$, et g est diagonale à coefficients diagonaux inverses. Puisque g commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in V$, ces coefficients diagonaux sont ± 1, et $\operatorname{Ker} \varphi = \{\pm \operatorname{id}\}$.

Montrons que φ est surjective. Soit g un élément de SO(3), et montrons que g est dans l'image de φ. Identifions V et $\mathbb{R}^3$ par l'application $\begin{pmatrix} ia & b \\ -\overline{b} & -ia \end{pmatrix} \mapsto (a, \operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b)$. Comme toute matrice anti-hermitienne est normale, donc diagonalisable en base orthogonale, nous pouvons supposer que g est une rotation d'axe l'axe de la première coordonnée dans $\mathbb{R}^3$. Mais comme l'élément $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$ de SU(2) agit par la rotation d'angle θ autour de l'axe de la première coordonnée, la surjectivité en découle.

Puisque φ est un morphisme surjectif de groupes topologiques compacts, de noyau fini, φ est un revêtement, par la question (3) c). Comme SU(2) est simplement connexe (car homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_3$ par la question (4) a)), l'application φ est même un revêtement universel. Donc le groupe fondamental de SO(3) est isomorphe au groupe des automorphismes de son revêtement universel :

$$\pi_1\big(\mathrm{SO}(3)\big) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

(5) a) Le groupe des rotations SO(3) agit (par restriction de l'action linéaire sur $\mathbb{R}^3$) sur la sphère $\mathbb{S}_2$, et envoie vecteur unitaire tangent à la sphère sur vecteur unitaire tangent à la sphère, en préservant la norme. Donc $(g, (x, v)) \mapsto (gx, gv)$ est une action de SO(3) sur $T^1\mathbb{S}_2$. De plus, cette action est simplement transitive, car SO(3) agit transitivement sur la sphère, et les rotations d'axe vertical agissent simplement transitivement sur les vecteurs unitaires du plan horizontal. L'application de SO(3) dans $T^1\mathbb{S}_2$ définie par $g \mapsto g(x_0, v_0)$, pour n'importe quel (x_0, v_0) fixé dans $T^1\mathbb{S}_2$, est donc une bijection continue entre deux fermés bornés d'espaces vectoriels euclidiens de dimension finie, donc compacts, donc est un homéomorphisme. Puisque les groupes fondamentaux de deux espaces topologiques connexes par arcs sont isomorphes, nous avons

$$\pi_1\big(T^1\mathbb{S}_2\big) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

b) Par l'absurde, soit $x \mapsto v(x)$ une application continue qui à tout point de la sphère $v(x)$ associe un vecteur tangent en x à $\mathbb{S}_2$ non nul. Quitte à diviser par $\|v(x)\|$, nous pouvons supposer que $v(x)$ est de norme 1. Notons $v(x)^\perp$ le vecteur directement orthogonal à $v(x)$, contenu dans le plan tangent à $\mathbb{S}_2$ en x (c'est-à-dire dans l'orthogonal de $\mathbb{R}x$). Il dépend continuement de x, comme $v(x)$. Alors, en considérant le cercle $\mathbb{S}_1 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s^2+t^2 = 1\}$, l'application de $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_1$ dans $T^1\mathbb{S}_2$, définie par $(x,(s,t)) \mapsto (x, sv(x)+tv(x)^\perp)$, est un homéomorphisme (car une bijection continue entre espaces compacts). Mais ceci est impossible. En effet, deux espace topologiques connexes par arcs homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes. Or le groupe fondamental de $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_1$ est $\mathbb{Z}$ (le revêtement universel de $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_1$ est la projection évidente de $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{R}$ (simplement connexe car ayant même type d'homotopie que $\mathbb{S}_2$) sur $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_1$). De plus, le groupe fndamental de $T^1\mathbb{S}_2$, isomorphe à celui de $\mathrm{SO}(3)$ par fonctorialité et la question (5) a), est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, par la question (4) c).

$\boxed{\text{Exercice II}}$ (1) Nous allons utiliser le théorème de van Kampen. Notons $k = 1, 2$. Dans la copie P_k du plan projectif, le point x_* admet un petit voisinage V_k homéomorphe au disque ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Notons U_k l'ouvert connexe par arcs de Y union de P_k et de V_{3-k}. Puisque V_k est contractile, l'ouvert U_k se rétracte par déformation forte sur la copie P_k, et donc son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'ouvert $U_1 \cap U_2$, homéomorphe au bouquet de deux disques ouverts pointés en leur centre, est contractile (donc connexe par arcs et de groupe fondamental trivial). Par le théorème de van Kampen, le groupe fondamental du bouquet de deux plans projectif est donc le produit libre de deux copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$$\pi_1(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ .$$

(2) a) Tout d'abord, $\operatorname{Im} e^{8i\theta} \geq 0$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta \in [\frac{2k\pi}{8}, \frac{(2k+1)\pi}{8}]$, et $p_1(e^{ik\pi}) = p_2(e^{ik\pi}) = x_*$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc l'application f est bien continue.

Nous allons encore utiliser le théorème de van Kampen. Notons π la projection canonique de la réunion disjointe $\overline{\mathbb{D}} \coprod Y$ dans X. Notons U_1 l'ouvert de X, égal à X privé de l'image par π du centre du disque $\overline{\mathbb{D}}$, et U_2 l'ouvert de X, image par π du disque ouvert $\mathbb{D} = \overline{\mathbb{D}} - \mathbb{S}_1$. Alors U_1 se rétracte par déformation forte sur l'image de Y par π. (Rappelons que $\pi_{|Y}$ est un homéomorphisme de Y sur son image dans π, les espaces $\overline{\mathbb{D}}$ et Y étant compacts, et $\mathbb{S}_1$ fermé dans $\overline{\mathbb{D}}$). En particulier, U_1 est connexe par arc, de groupe fondamental $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'ouvert U_2 est contractile (donc connexe par arcs et de groupe fondamental trivial). L'ouvert $U_1 \cap U_2$ est un anneau topologique, qui se rétracte par déformation forte sur l'image par π du cercle de rayon $\frac{1}{2}$, donc son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Pointons Y au point commun aux deux plans projectifs. Par le théorème de van Kampen, le groupe fondamental de X est donc isomorphe au quotient de $\pi_1(Y)$ par le sous-groupe distingué engendré par $f_*\pi_1(\mathbb{S}_1, 1)$. Pour $k = 1, 2$, l'application $\alpha_k : [0,1] \to P_k$ définie par $t \mapsto p_k(e^{i\pi t})$ est un lacet en x_* dont la clase d'homotopie a_k engendre le groupe fondamental de P_k. Par construction, l'image par f_* de l'un des deux générateurs de $\pi_1(\mathbb{S}_1) \simeq \mathbb{Z}$ est $(a_1a_2)^8$, car le lacet $f(\mathbb{S}_1)$ parcourt la concaténation de lacets $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, exactement 8 fois. Une présentation du groupe $\pi_1(X)$ est donc $\langle a_1, a_2 | a_1^2 = a_1^2 = (a_1a_2)^8 = 1\rangle$. En envoyant a_1 sur la réflexion par rapport à l'axe horizontal du plan euclidien, et a_2 sur la réflexion par rapport à la droite faisant un angle $\frac{\pi}{8}$, on obtient un isomorphisme avec le groupe diédral D_8 d'ordre 16 :

$$\pi_1(X) \simeq D_8\ .$$

b) Par le théorème de classification des revêtements, l'espace X étant connexe et localement contractile, les revêtements connexes de X sont en bijection avec les classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(X)$, les revêtements galoisiens correspondant aux sous-groupes distingués. De plus, le nombre de feuillets est égal à l'indice du sous-groupe.

Rappelons que le groupe diédral d'ordre 16 est composée des 8 rotations d'angles $\frac{2k\pi}{8}$ pour $k = 0, 1 \ldots, 8$ et des 8 réflexions par rapport aux droites d'angles $\frac{k\pi}{8}$ avec l'horizontale pour $k = 0, 1 \ldots, 8$. Les ordres possibles des sous-groupes de D_8 sont 1, 2, 4, 8 et 16. Si $b_1, \ldots, b_p$ sont des éléments de D_8, notons $\langle b_1, \ldots, b_p \rangle$ le sous-groupe qu'ils engendrent.

Il y a un sous-groupe d'ordre 1, le sous-groupe trivial, correspondant au revêtement universel de X. Il y a trois classes de conjugaison de sous-groupes d'ordre 2 : $\langle a_1 \rangle$, $\langle a_2 \rangle$ (ces deux sous-groupes ne sont pas distingués) et $\langle (a_1a_2)^4 \rangle$ (où $(a_1a_2)^4$ est la rotation d'angle π) qui est central, donc distingué. Il y a trois classes de conjugaison de sous-groupes d'ordre 4 : le cyclique $\langle (a_1a_2)^2 \rangle$ (distingué) et ceux (non distingués) engendrés par deux réflexions commutantes $\langle a_1, a_1a_2a_1a_2a_1 \rangle$ et $\langle a_2, a_2a_1a_2a_1a_2 \rangle$. Il y a trois sous-groupes (distingués, car tout sous-groupe d'indice 2 l'est) d'ordre 8, correspondant au sous-groupe de toutes les rotations $\langle a_1a_2 \rangle$, et ceux, isomorphes au groupe diédral D_4 d'ordre 8, engendrés par deux réflexions sur des droites faisant un angle $\pi/4$, qui sont $\langle a_1, a_2a_1a_2 \rangle$ et $\langle a_2, a_1a_2a_1 \rangle$. Enfin, il y a un sous-groupe (distingué) d'ordre 16, correspondant au revêtement trivial de X.