FIMFA 2$^{\text{e}}$ année
Topologie algébrique — examen — 15 janvier 2007

1. Soit

$$0 \longrightarrow (A,\partial_A) \xrightarrow{\alpha} (B,\partial_B) \xrightarrow{\beta} (C,\partial_C) \xrightarrow{\gamma} (D,\partial_D) \longrightarrow 0$$

une suite exacte de complexes de chaînes. Supposons que $H_q(B,\partial_B) = H_q(C,\partial_C) = 0$ pour tout q. Montrer que $H_q(D,\partial_D) \cong H_{q-2}(A,\partial_A)$ pour tout q. (Indication: on peut le démontrer directement, mais il est beaucoup plus simple d'appliquer le lemme du serpent.)

Soit $C_0 = \mathrm{Ker}(\gamma) = \mathrm{Im}(\beta)$, et ∂_0 la restriction de ∂_C. On a deux suites exactes courtes de complexes de chaînes:

$$0 \longrightarrow (A,\partial_A) \xrightarrow{\alpha} (B,\partial_B) \xrightarrow{\beta} (C_0,\partial_0) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow (C_0,\partial_0) \xrightarrow{\text{incl}} (C,\partial_C) \xrightarrow{\gamma} (D,\partial_D) \longrightarrow 0$$

Puisque $H_q(B,\partial_B) = 0 = H_q(C,\partial_C)$ pour tout q, le lemme du serpent entraîne

$$H_q(D,\partial_D) \cong H_{q-1}(C_0,\partial_0) \cong H_{q-2}(A,\partial_A)$$

pour tout q.

2. Soit X un espace, et $\mathcal{U} = \{U_1,U_2,U_3\}$ un recouvrement ouvert de X. En général, un espace Y est *acyclique* si $H_q(Y) \cong H_q(\text{point})$ pour tout q, ou (ce qui est équivalent) si $\widetilde{H}_q(Y) = 0$ pour tout q.

(a) Construire une suite exacte de complexes de chaînes de la forme

$$0 \longrightarrow S_q(U_1\cap U_2\cap U_3) \longrightarrow \bigoplus_{i<j} S_q(U_i\cap U_j) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{3} S_q(U_i) \longrightarrow S_q^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0.$$

Soit $U_{ij} = U_i \cap U_j$, et $V = U_1\cap U_2\cap U_3$. Considérons tous les groupes $S_q(U_i)$, $S_q(U_{ij})$, et $S_q(V)$ comme des sous-groupes de $S_q(X)$. Définir

$$S_q(V) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i<j} S_q(U_i\cap U_j) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{i=1}^{3} S_q(U_i) \xrightarrow{\gamma} S_q^{\mathcal{U}}(X)$$

par $\alpha(x) = (x,x,x)$, $\beta(x_{12},x_{13},x_{23}) = (x_{12}-x_{13}, x_{23}-x_{12}, x_{13}-x_{23})$, et $\gamma(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3$. Il est évident que α est injective, et γ est surjective par définition de $S_q^{\mathcal{U}}(X)$. Les inclusions $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)$ et $\mathrm{Im}(\beta) \subseteq \mathrm{Ker}(\gamma)$ sont évidentes, et l'inclusion $\mathrm{Im}(\alpha) \supseteq \mathrm{Ker}(\beta)$ suit du fait que $S_q(V)$ est l'intersection des sous-groupes $S_q(U_i)$.
Il reste à montrer que $\mathrm{Im}(\beta) \supseteq \mathrm{Ker}(\gamma)$. Soit $(x_1,x_2,x_3) \in \mathrm{Ker}(\gamma)$, donc $x_i \in S_q(U_i)$ et $x_1+x_2+x_3 = 0$. Soit $x_1 = \sum_{i=1}^k n_i\phi_i$ où $n_i \in \mathbb{Z}$, $n_i \neq 0$, et $\phi_i : \Delta^q \to U_1$. Puisque $\sum x_i = 0$, chaque ϕ_i paraît comme terme dans x_2 ou x_3 (ou les deux). En particulier, pour tout i, $\mathrm{Im}(\phi_i)$ est contenu dans U_{12} ou dans U_{13}. On peut donc écrire $x_1 = x_{12} + x_{13}$, où $x_{1i} \in S_q(U_{1i})$.
De la même façon, on écrit $x_2 = x_{21} + x_{23}$ et $x_3 = x_{31} + x_{32}$, où $x_{ij} \in S_q(U_{ij})$ dans tous les cas. On a donc

$$(x_{12}+x_{21}) + (x_{13}+x_{31}) + (x_{23}+x_{32}) = 0,$$

chaque terme (non nul) $n_i\phi_i$ de $x_{12}+x_{21}$ paraît comme terme dans $x_{13}+x_{31}$ ou dans $x_{23}+x_{32}$, et donc $x_{12}+x_{21} \in S_q(V)$. Nous pouvons donc définir

$$y = (x_{12}, -x_{13}, x_{23} + (x_{12}+x_{21})) \in \bigoplus_{i<j} S_q(U_i\cap U_j),$$

et $\beta(y) = (x_1,x_2,x_3)$.

(b) Supposons que $U_1\cap U_2\cap U_3 \neq \emptyset$, et que U_i et $U_i\cap U_j$ soient acycliques pour tout $i \neq j$. Déterminer la relation entre l'homologie réduite de X et l'homologie réduite de $U_1\cap U_2\cap U_3$.

On peut facilement prolonger la suite du (b) à une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

en degré -1. Par un théorème de cours, $\widetilde{H}_q(S^{\mathcal{U}}(X)) \cong \widetilde{H}_q(X)$ pour tout q. Donc par (2a) et (1), $\widetilde{H}_q(X) \cong \widetilde{H}_{q-2}(V)$.

(c) Supposons que U_i soit acyclique pour tout i. Trouver une suite exacte qui relie l'homologie réduite de X avec celle des intersections $U_i \cap U_j$ et $U_1 \cap U_2 \cap U_3$.

Dans la situation du premier problème, si $H_q(C, \partial_C) = 0$ pour tout q, alors $H_q(D, \partial_D) \cong H_{q-1}(C_0, \partial_0)$. Le lemme du serpent, appliqué à l'autre suite exacte courte, entraîne donc une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_q(A, \partial_A) \longrightarrow H_q(B, \partial_B) \longrightarrow H_{q+1}(D, \partial_D) \longrightarrow H_{q-1}(A, \partial_A) \longrightarrow \cdots;$$

ou (dans cette situation particulière)

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_q(V) \longrightarrow \bigoplus_{i<j} \widetilde{H}_q(U_{ij}) \longrightarrow \widetilde{H}_{q+1}(X) \longrightarrow \widetilde{H}_{q-1}(V) \longrightarrow \cdots.$$

3. Soit G un groupe topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $\mu : G \times G \longrightarrow G$ sa loi de composition, et $1 \in G$ son élément neutre. Montrer que la composée

$$\pi_1(G,1) \times \pi_1(G,1) \xrightarrow[\cong]{(\mathrm{pr}_{1\#} \times \mathrm{pr}_{2\#})^{-1}} \pi_1(G \times G, (1,1)) \xrightarrow{\mu_\#} \pi_1(G,1)$$

est égale à la loi de composition du groupe $\pi_1(G,1)$. Montrer que le groupe $\pi_1(G,1)$ est abélien.

Soient $\phi, \psi : I \longrightarrow G$ deux lacets basés à 1; donc $\phi(0) = 1 = \phi(1)$ et $\psi(0) = 1 = \psi(1)$. Soit γ le lacet $\gamma(t) = \phi(t)\cdot\psi(t)$. Alors

$$[\gamma] = \mu_\# \circ (\mathrm{pr}_{1\#} \times \mathrm{pr}_{2\#})^{-1}([\phi],[\psi]).$$

Soit $\Phi : I \times I \longrightarrow G$ l'application $\Phi(s,t) = \phi(s)\cdot\psi(t)$; donc $\gamma(t) = \Phi(t,t)$. On peut exprimer chacun des trois lacets $\phi\cdot\psi$, $\psi\cdot\phi$, et γ comme la composée d'un chemin de $(0,0)$ vers $(1,1)$ dans $I \times I$ suivi par Φ. Ces trois chemins sont homotopes (rel ∂I) par la convexité de $I \times I$, ce qui entraîne que

$$[\phi]\cdot[\psi] = [\psi]\cdot[\phi] = [\gamma].$$

En particulier, le groupe $\pi_1(G,1)$ est abélien.

4. Pour $n \geq 2$, soit $\mu_n \subseteq \mathbb{C}^\times$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité. Pour $m \geq 2$, considérons S^{2m-1} comme l'espace des éléments de norme 1 dans $\mathbb{C}^m$. Le groupe μ_n opère sur S^{2m-1} par multiplication: $\lambda(z_1, \ldots, z_m) = (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_m)$ ($z_i \in \mathbb{C}$). Notons par S^{2m-1}/μ_n l'espace des orbites de cette action.

(a) Montrer que la projection naturelle de S^{2m-1} sur S^{2m-1}/μ_n est un revêtement, et déterminer $\pi_1(S^{2m-1}/\mu_n)$.

Soit $p : S^{2m-1} \longrightarrow X := S^{2m-1}/\mu_n$ la projection. Soit $\widehat{x} = p(x) \in X$ où $x \in S^{2m-1}$. Alors $p^{-1}(\widehat{x}) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mu_n\}$ est fini. Soit $t = \min\{\|x_1 - x_2\| \mid x_1, x_2 \in p^{-1}(\widehat{x})\}$, $B_{t/2}(x)$ la boule ouverte de rayon $t/2$ et de centre x, et $V = p(B_{t/2}(x))$. Alors $p^{-1}(V)$ est la réunion disjointe des boules $B_{t/2}(\lambda x)$ pour tout $\lambda \in \mu_n$, et chacune de ces boules s'envoie homéomorphiquement sur V. En particulier, V est ouvert dans X puisque les boules sont ouvertes dans S^{2m-1}; et p satisfait aux conditions d'un revêtement.

Puisque $2m - 1 > 1$, S^{2m-1} est simplement connexe. Donc par un théorème du cours, $\pi_1(X) \cong \mu_n$ est cyclique d'ordre n.

(b) Montrer que S^{2m-1}/μ_n admet une structure cellulaire avec une cellule en chaque dimension $0, 1, \ldots, 2m-1$. (En tant que cellule de dimension n, on peut remplacer D^n par $D^{n-k} \times D^k$ ou par $D^{n-k} \times I^k$ pour un certain k, si on le veut.)

Soit $X = S^{2m-1}/\mu_n$. Soit $D(\mathbb{C}^k) = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\| \leq 1\}$ (donc $D(\mathbb{C}^k) \cong D^{2k}$). Pour tout $0 \leq k \leq m-1$, on définit

$$\varphi_{2k} : D(\mathbb{C}^k) \longrightarrow X \qquad \text{par} \quad \varphi_{2k}(z_1, \ldots, z_k) = (z_1, \ldots, z_k, \sqrt{1 - \sum |z_i|^2}, 0, \ldots)$$

$$\varphi_{2k+1} : D(\mathbb{C}^k) \times I \longrightarrow X \qquad \text{par} \quad \varphi_{2k+1}(z_1, \ldots, z_k; t) = (z_1, \ldots, z_k, \sqrt{1 - \sum |z_i|^2} \cdot e^{2i\pi t/n}, 0, \ldots).$$

Soit $X^{(\ell)} = \mathrm{Im}(\varphi_\ell)$ pour tout $\ell = 0, 1, \ldots, 2m-1$. Alors, $X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq X^{(2m-1)} = X$, et chaque élément de $X^{(\ell)} \smallsetminus X^{(\ell-1)}$ est l'image d'un point unique dans l'intérieur de $D(\mathbb{C}^k)$ (si $\ell = 2k$) ou de $D(\mathbb{C}^k) \times I$ (si $\ell = 2k+1$). Les autres conditions sont faciles à controller, puisque tous ces espaces sont compacts.

(c) ($m = 2$) Déterminer $H_q(S^3/\mu_n)$ pour tout q (en fonction de n).

Puisque $X = S^3/\mu_n$ admet une structure cellulaire avec une cellule en chaque dimension $0, 1, 2, 3$, son homologie est l'homologie d'un complexe de la forme

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Nous savons que $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ puisque X est connexe, et que $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ puisque $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ceci entraîne que $\partial_1 = 0$, et que ∂_2 est multiplication par $\pm n$. En particulier, $\mathrm{Ker}(\partial_2) = 0$, et donc $\partial_3 = 0$. La conclusion: $H_q(X) \cong \mathbb{Z}$ pour $q = 0, 3$, $\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $q = 1$, $\cong 0$ pour $q = 2$ ou $q \geq 4$.