Topologie algébrique

Epreuve du 28 Janvier 2009

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on note $[A, B]$ le segment fermé, $[A, B[$ le segment semi-ouvert. On considère l'espace $X \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des segments suivants :

- le segment fermé $[A, A']$ compris entre les points A de coordonnées $(0, 1)$ et A' de coordonnées $(0, -1)$,
- les segments semi-ouverts $[A, C_n[$ compris entre les points A et C_n de coordonnées $(\frac{1}{n}, 0)$, (C_n exclu), ce pour tout $n > 0$,
- les segments semi-ouverts $[A', C_n[$ compris entre les points A' et C_n de coordonnées $(\frac{-1}{n}, 0)$, (C_n exclu), ce pour tout $n > 0$.

1.1. Montrer que cet espace ne se rétracte pas par déformation sur le point $O = (0, 0)$. Qu'en est-il pour les autres points (se servir de la (non)-connexité locale) ?
1.2. Montrer que les groupes d'homotopie sont triviaux — on montrera que l'image de tout compact (connexe par arcs, localement connexe par arcs) est contenue dans un sous-espace de X qui est réunion de $[A, A']$ et de segments $[A, M_n] \subset [A, C_n[$, $[A', M'_n] \subset [A', C_n[$, avec M_n tendant vers A quand n tend vers l'infini (resp. M'_n tendant vers A').
1.3. Montrer que X n'est pas homotopiquement équivalent à un CW-complexe.
1.4. Peut-on trouver un CW-complexe $\bar{X}$ et une application continue bijective $\bar{X} \longrightarrow X$?

2. Soit X un CW-complexe connexe, montrer que l'on peut construire par attachement de cellules un CW-complexe P_nX et une application injective continue $i_n \colon X \longrightarrow P_nX$ tels que

- $\pi_k(P_nX) = \{0\}$ si $k > n$,
- i_n induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie si $k \leq n$.

Montrer que les deux conditions ci-dessus déterminent le type d'homotopie de P_nX : à savoir que si P_nX et P'_nX sont deux CW-complexes qui les vérifient, alors ils sont homotopiquement équivalents.
Montrer que l'on peut effectuer la construction de telle manière qu'il existe des applications $p_n \colon P_nX \longrightarrow P_{n-1}X$ telles que $p_n \circ i_n = i_{n-1}$.

Peut on remplacer p_n par une fibration ?

3.1. Classer à isomorphisme près les revêtements galoisiens à 4 feuillets d'un bouquet de deux cercles. Les décrire.
3.2. Démontrer qu'un sous-groupe normal non trivial H d'un groupe libre L qui est d'indice infini ne peut être engendré par une partie finie (se servir du groupe d'automorphismes d'un revêtement approprié).

Dans la suite, les espaces considérés sont des CW-complexes pointés, et $[A, B]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie **pointées** entre deux tels espaces A et B. Le cône d'une application continue pointée $f \colon X \longrightarrow Y$ est le quotient de $\big(X \times [0, 1]\big) \coprod Y$ par la plus petite relation d'équivalence identifiant $(x, 1)$ à $f(x)$, $(x, 0)$ et $(x', 0)$, $\forall x, x'$, et (x_0, t) et (x_0, t'), $\forall t, t'$, où x_0 est le point base de X. Il est pointé en l'image de $(x_0, 0)$.

4.1. (Suites exactes de Puppe) Soit $p\colon E \longrightarrow B$ une fibration, e et b les points bases de E et B, $F = p^{-1}(b)$, $i\colon F \longrightarrow E$ l'inclusion. On suppose l'espace E connexe. Analyser en détails la signification de l'exactitude de la suite

$$\pi_1(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b) \longrightarrow \pi_0(F, e) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b)$$

en $\pi_0(F, e)$, c'est-à-dire montrer qu'il y a une action de $\pi_1(B, b)$ sur $\pi_0(F, e)$ et que deux points ont même image par i_* si et seulement s'ils sont dans une même orbite sous l'action de $\pi_1(B, b)$.
4.2. Soit $f\colon A \longrightarrow X$ une application continue pointée (où A et X sont deux CW-complexes pointés), et soit C le cône de f. Montrer que le cône de l'inclusion i de X dans C est homotopiquement équivalent à ΣA.

Soit Z un espace. On veut montrer que l'on a une suite exacte de classes d'homotopie pointées et groupes :

$$[A, Z] \leftarrow [X, Z] \leftarrow [C, Z] \leftarrow [\Sigma A, Z] \leftarrow [\Sigma X, Z] \leftarrow [\Sigma C, Z]$$

précisez ce qu'il faut entendre par suite exacte en $[C, Z]$, en particulier on montrera que

- $[\Sigma A, Z]$ est un groupe qui agit sur $[C, Z]$, on construira la structure de groupe et l'action, en utilisant :
- l'application $C \longrightarrow \Sigma A \vee C$ qui envoie sur le point base de $\Sigma A \vee C$ les points de la forme $(a, 1/2) \in C$,
- envoie (a, u) sur $(a, 2u)$ si $u \leq 1/2$ dans $\Sigma A \subset \Sigma A \vee C$,
- (a, u) sur $(a, 2u - 1)$ dans $C \subset \Sigma A \vee C$ si $u \geq 1/2$, et $x \in X \subset C$ vers $x \in X \subset C$,
- l'application analogue de $\Sigma A \longrightarrow \Sigma A \vee \Sigma A$, et l'application évidente $Z \vee Z \longrightarrow Z$

5. Calculer $\pi_2(S^1 \vee S^2)$ (se servir du revêtement universel).

6. Calculer le groupe fondamental de l'espace obtenu en identifiant dans la sphère S^2 le pôle nord et le pôle sud. Calculer le groupe fondamental de l'espace obtenu en identifiant dans la sphère S^2 trois points distincts.

7. Quel est le groupe fondamental de $\mathbf{R}P^2 \vee \mathbf{R}P^2$? Peut-on trouver un revêtement galoisien de $\mathbf{R}P^2 \vee \mathbf{R}P^2$ dont le groupe d'automorphisme soit $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$?

8. Soit $k \leq n$. Calculer $\pi_k(\mathbf{R}P^n)$, $k \leq n$. Existe-t'il une rétraction de $\mathbf{R}P^n$ vers $\mathbf{R}P^k$ vu comme sous-espace par le plongement standard?

9. Soit X un CW-complexe connexe, on suppose que $\pi_1(X)$ est parfait (égal à son groupe dérivé engendré par les éléments $xyx^{-1}y^{-1}$, où $x, y \in \pi_1(X)$). Montrer que $\pi_2(\Sigma X)$ est trivial.