Topologie algébrique

Epreuve du 28 Janvier 2009

1.Dans $\mathbb{R}^2$ on note $[A, B]$ le segment fermé, $[A, B[$ le segment semi-ouvert. On considère l'espace $X \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des segments suivants

- **le segment fermé, $[A, A']$ compris entre les points A de coordonnées $(0, 1)$ et A' de coordonnées $(0, -1)$.**
- **les segments semi-ouverts $[A, C_n[$ compris entre les points A et C_n de coordonnées $(\frac{1}{n}, 0)$, (C_n exclu), ce pour tout $n > 0$,**
- **les segments semi-ouverts $[A', C_n[$ compris entre les points A' et C_n de coordonnées $(\frac{-1}{n}, 0)$, (C_n exclu), ce pour tout $n > 0$.**

1.1. Montrer que cet espace ne se rétracte par déformation sur le point $O = (0, 0)$. Qu'en est il pour les autres points? (se servir de la (non)-connexité locale).
Rappeler la définition de rétraction par déformation en O.
Supposons qu'il y ait une telle rétraction, soit r_t où t est le paramètre de déformation. Soit U voisinage de O tel que pour t tous les points de U soient contenus dans un voisinage de O prescrit à l'avance V. Ceci est possible par compacité de $[0, 1]$, en effet l'image inverse d'un voisinage V de O est un voisinage de $O \times [0, 1]$. Cet ouvert contient pour chaque $t \in [0, 1]$ un ouvert $U_t \times I(t)$, ici $I(t)$ est un voisinage de t, U_t de O. Par compacité de $[0, 1]$ on peut se restreindre à un nombre fini de t et donc à considérer l'intersection (finie) des U_t associés. On peut choisir V tel que $V \cap X$ ne soit pas connexe, prendre par exemple l'intersection du disque de contre O et de rayon $\rho < 1$. Considérons une suite de points $M_n \in [A, C_n[$ tendant vers O.
Considérons maintenant le chemin $t \mapsto r_t(M_n)$ pour n assez grand, t i.e pour que $M_n \in U$. Il doit rester dans V, dans la composante connexe de M_n, composante qui ne contient pas O. Or il doit aboutir en O, contradiction.
1.2. Montrer que les groupes d'homotopie sont triviaux. -on montrera que l'image de tout compact K (connexe par arcs, localement connexe par arcs) est contenue dans un sous espace de X qui est réunion de $[A, A']$ et de segments $[A, M_n] \subset [A, C_n[$, $[A', M'_n] \subset [A', C_n[$, avec M_n tend vers A quand n tend vers l'infini (resp. M'_n tend vers A').
On procède comme précédemment en supposant l'existence dans l'image d'une suite de points M_n. Désignons par f l'application du compact K vers X, les points M_n sont image de points k_n dont on peut suppoeser qu'ils convergent vers un point k (supposons K métrique). Si on choisit pour n assez grand un chemin dans un voisinage assez petit entre k_n et k (ce qui est possible à cause de la locale connexité par arcs) on obtient une contradiction analogue à celle ci dessus.
1.3. Montrer que X n'est pas homotopiquement équivalent à un CW-complexe.
En effet sinon l'espace serait contractile ayant tous ses groupes d'homotopie triviaux (énoncer le cours : tout CW-complexe dont les groupes d'homotopie sont triviaux est contractile).
1.4. Peut on trouver un CW-complexe $\bar{X}$ et une application continue bijective $\bar{X} \longrightarrow X$?

Oui le complexe obtenu comme suit. On considère la réunion de $[-1,+1] = I$ et deux copies de $[0,1[\times\mathbf{N}$. Puis on identifie $1 \in I$ et les points $(0,n)$ de la première copie, de même pour $-1 \in I$ et les points $(0,n)$ de la seconde. Il y a une application bijective continue évidente vers X.

2. Pour cet exercice on renvoie à Hatcher (Chapitre 4, 4.17), (ou aux notes sur la page http://www.math.univ-paris13.fr/ schwartz/FIMFA/FIMFA.html). En particulier la réponse à la dernière question est oui : on peut remplacer p_n par une fibration.

3.1.Classer à isomorphisme près les revêtements galoisiens à 4 feuillets d'un bouquet de deux cercles. Les décrire.
Les revêtements galoisiens à quatre feuillets ont pour groupe d'automorphismes $\mathbf{Z}/2\times\mathbf{Z}/2$ ou $\mathbf{Z}/4$, seuls groupes à 4 éléments. Le groupe d'automorphismes est le quotient du groupe fondamental du révêtement universel ($\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ ici) par le groupe fondamental du revêtement -identifié à un sous-groupe distingué (puisque le revêtement est galoisien) du groupe fondamental du révêtement universel. On est donc ramené à classifier les homomorphismes surjectifs de ($\mathbf{Z}*\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}/2\times\mathbf{Z}/2$ et $\mathbf{Z}/4$. Donc de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}/2\times\mathbf{Z}/2$ et $\mathbf{Z}/4$. On désigne par a et b les générateurs de ($\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ et par abus de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Les sous-groupes de ($\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (ou les plus petit sous-groupes distingués de ($\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$) engendrés par(a^2, b^2); resp. (a^4, b); resp. (a, b^4); resp. ($a + b$, a^4).
Pour une description voir Hatcher Chapitre 1 page 58 exemples 7 et 8.
3.2.Démontrer qu'un sous-groupe distingué non-trivial H d'un groupe libre L qui est d'indice infini ne peut être finiment engendré (se servir du groupe d'automorphismes d'un revêtement approprié).
Le groupe libre L est le groupe fondamental d'un bouquet de cercles (autant que de générateurs de L) B. On considère le revêtement associé, $\tilde{B}$, au sous-groupe distingué H de L. Son groupe d'automorphisme est infini. Le graphe $\tilde{B}$ n'est pas par hypothèse simplement connexe. On choisit un lacet σ non-trivial dans $\tilde{B}$ et que l'on considère l'action du groupe d'automorphismes sur ce lacet. Puisque le groupe d'automorphismes G est infini et agit librement on peut trouver une suite infinie g_i d'éléments de G tels que les images des $g_i\sigma$ soient deux à deux disjointes. Cela implique le résultat, car en écrasant en un point un sous-arbre appoprié (graphe connexe simplement connexe) on obtient un bouquet infini de cercles homotopiquement équivalent à $\tilde{B}$.

4.1. (Suites exactes de Puppe)
Tout cet exercice consiste essentiellement en des questions de cours, traitées en particulier (et en général) dans Hatcher chapitre 4. (théorème 4.41 page 375)
4.2. Soit $f\colon A \longrightarrow X$ (A, X CW-complexe), et soit C le cône de f (réduit). Montrer que le cône de l'inclusion i de Y dans C est homotopiquement équivalent à ΣA. Soit Z un espace
On veut montrer que l'on a une suite exacte de classes d'homotopie pointées et groupes :

$$[A, Z] \leftarrow [X, Z] \leftarrow [C, Z] \leftarrow [\Sigma A, Z] \leftarrow [\Sigma Y, Z] \leftarrow [\Sigma C, Z]$$

précisez ce qu'il faut entendre par suite exacte en $[C, Z]$, en particulier on montrera que

- $[\Sigma A, Z]$ est un groupe qui agit sur $[C, Z]$, on construira la structure de groupe et l'action, en utilisant :

- l'application $C \longrightarrow \Sigma A \vee C$ qui envoie sur le point base de $\Sigma A \vee C$ les points de la forme $(a, 1/2) \in C$,
- envoie (a, u) sur $(a, 2u)$ si $u \leq 1/2$ dans $\Sigma A \subset \Sigma A \vee C$,
- (a, u) sur $(a, 2u - 1)$ dans $C \subset \Sigma A \vee C$ si $u \geq 1/2$, et $x \in X \subset C$ vers $x \in X \subset C$,
- l'application analogue $\delta\colon \Sigma A \longrightarrow \Sigma A \vee \Sigma A$, et l'application évidente $r\colon Z \vee Z \longrightarrow Z$

Pour cette partie on pouvait d'abord observer qu'elle se ramenait au cas précédent car $Z^C \longrightarrow Z^X \longrightarrow \mathbf{Z}^C$ est une fibration. La description proposée de l'action est faite *via* la structure de "co-H-espace" de la suspension (voir Whitehead Elements of Homotopy theory page 121 à 124, où est utilisée la terminologie H'-space). Le point est que la loi qui à $f, g\colon C \longrightarrow \Sigma A$ associe $r \circ (f \vee g) \circ \delta$ induit une loi de groupe au niveau des classes d'homotopie (trouver l'inverse!). L'action est décrite de la même manière.

5. Calculer $\pi_2(S^1 \vee S^2)$ (se servir du revêtement universel).
Le revêtement universel E de $\pi_2(S^1 \vee S^2)$ est l'espace obtenu en attachant une sphère S^2 par un pôle à $\mathbb{R}$ en chaque entier. Il faut décrire l'application vers $\pi_2(S^1 \vee S^2)$: l'exponentiellle sur $\mathbb{R}$, l'identité sur les sphères. Il faut montrer que cet espace est simplement connexe, pour ce faire on observe qu'une application de S^1 vers E prend valeurs (par compacité) dans un sous-espace qui est réunion d'un sous-segment $[-n, n]$ $(n > 0)$ de $\mathbb{R}$ et des sphères attachées. Ce dernier espace est homotopiquement équivalent au bouquet de $2n + 1$ sphères S^2 (on fait le quotient par le sous complexe contractile $[-n, n]$). Le théorème de Van Kampen garantit alors la simple connexité. Ce qui montre le résultat.
Pour le calcul du π_2. On sait (cours : les groupes d'homotopie supérieurs d'un espace et d'un quelconque de ses revêtements coïncident) que l'on se ramène à celui de E. On commence par observer que le π_2 du bouquet de k sphères S^2, soit G_k ce groupe, est isomorphe à $\mathbf{Z}^k$. En effet le théorème de Freudenthal montre qu'il y a une surjection du π_1 du bouquet de k cercles S^1, soit du produit libre de k copies de $\mathbf{Z}$ vers G_k. Les k applications évidentes du bouquet de de k sphères S^2 vers S^2 (identité sur une composante, constante ailleurs), fournissent (en prenant leur somme directe) un épimorphisme de G_k vers $\pi_2(S^2)^{\oplus k} \cong \mathbf{Z}^k$. Comme le π_2 est commutatif il suit que $G_k \cong \mathbf{Z}^k$ (le fait que $\pi_2(S^2) \cong Z$ est du cours)
Pour achever l'exercice on observe qu'il y a une surjection de $\pi_2(E)$ vers $\mathbf{Z}^{\oplus \mathbf{N}}$ (on a mis la somme directe pour insister sur le fait que ce n'est pas le produit), obtenu en généralisant de manière évidente la construction ci-dessus). Cet homomorphisme est clairement injectif.

6. Calculer le groupe fondamental de l'espace obtenu en identifiant dans la sphère S^2 le pôle nord et le pôle sud. Calculer le groupe fondamental de l'espace obtenu en identifiant dans la sphère S^2 trois points distincts.
On observe que le premier espace est équivalent homotopiquement à la sphère à laquelle on attache le segment $[0, 1]$ en identifiant 0 au p ole nord et 1 au pôle sud. En effet quand dans un CW-complexe on écrase un un point un sous-CW-complexe contractile on ne change pas le type d'homotopie. Dans un second temps on écrase en un point un méridien joignant les deux ples. Pour la même raison le type d'homotopie ne change pas. L'espace initial est donc homotopiquement équivalent an bouquet de S^2 et de S^1. Par application du théorème de van Kampen (voir exercice suivant) son π_1 est donc $\mathbf{Z}$. Pour

le second cas on obtient un espace équivalent au bouquet de S^2 et de 2 cercles, son π_1 est donc $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

7. Quel est le groupe fondamental de $\mathbf{R}P^2 \vee \mathbf{R}P^2$? Peut on trouver un revêtement galoisien de $\mathbf{R}P^2 \vee \mathbf{R}P^2$ dont le groupe d'automorphisme soit $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$?
On peut appliquer le théorème de Van Kampen en écrivant l'espace comme réunion de deux ouverts chacun union d'une des copies de $\mathbb{RP}^2$ et d'un voisinage du point base dans l'autre copie, voisinage homéomorphe à un disque ouvert D^2. Ou il sufit d'observer que les points bases sont non dégénérés, et que donc on peut appliquer Van kampen à la réunion des deux fermés évidents (chaque copie de $\mathbb{RP}^2$). Il suit que le π_1 est le produit libre $\mathbf{Z}/2 * \mathbf{Z}/2$. . La réponse à la seconde question est non, car si on pouvait trouver un tel revêtement $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ serait un quotient (citer le cours) de $\mathbf{Z}/2 * \mathbf{Z}/2$, or tout quotient commutatif de ce groupe ne contient pas d'éléments d'ordre 4.

8. Soit $k \leq n$. Calculer $\pi_k(\mathbf{R}P^n)$, $k \leq n$. Existe t'il une rétraction de $\mathbf{R}P^n$ vers $\mathbf{R}P^k$ vu comme sous-espace par le plongement standard?
Le théorème évoqué plus haut sur les groupes d'homotopie supérieurs des revêtements montre que si $k \geq 2$, $\pi_k(\mathbf{R}P^n) \cong \pi_k(S^n)$ (S^n est le revêtement universel de $\mathbf{R}P^n$). Donc (cours) $\pi_n(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}$, et $\pi_n(\mathbf{R}P^n) \cong \{0\}$ si $k < n$. Soit $k < n$ et supposons qu'il existe une rétraction $r\colon \mathbf{R}P^n \longrightarrow \mathbf{R}P^k$, notons $i\colon \mathbf{R}P^k \longrightarrow \mathbf{R}P^n$ l'inclusion.
L'application $r \circ i$ doit induire l'identité sur les groupes d'homotopie, donc sur $\pi_k(\mathbf{R}P^k \cong \mathbf{Z}$, ce qui est impossible car elle factorise par $\{0\}$.

9. Soit X un CW-complexe connexe, on suppose que $\pi_1(X)$ est parfait (égal à son groupe dérivé engendré par les éléments $xyxx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in \pi_1(X)$). Montrer que $\pi_2(\Sigma X)$ est trivial.
Le théorème de suspension (cours à citer) nous dit $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_2(\Sigma X)$ est surjectif, comme le π_2 est abélien le sosu-groupe dérivé est dans le noyau, le résultat suit.