FIMFA ENS Ulm — Lundi 20 novembre 2009 — Durée : 2 heures

Examen partiel de topologie algébrique

Documents et calculatrices interdits

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice I (1) Un *H-espace*[1] est un espace topologique pointé (X, e) muni d'une loi de composition interne continue $*$ telle que $e * e = e$ et telle que les applications de X dans X définies par $x \mapsto x * e$ et $x \mapsto e * x$ soient homotopes à l'application identité relativement à $\{e\}$.

a) Soient α et β deux lacets d'origine e dans X. Montrer que les applications $h : [0,1]^2 \to X$ et $h' : [0,1]^2 \to X$ définies respectivement par

$$h(s,t) = \begin{cases} \alpha((1+s)t) * \beta((1-s)t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \alpha((1-s)t+s) * \beta((1+s)t-s) & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases} \qquad \text{et}$$

$$h'(s,t) = \begin{cases} e * \Big(\beta(2t) * \big(e * \overline{\beta}(2t)\big)\Big) & \text{si} \quad t \leq s/2 \\ \alpha(t-s/2) * \Big(\beta(t+s/2) * \big(\overline{\alpha}(t-s/2) * \overline{\beta}(t+s/2)\big)\Big) & \text{si} \quad s/2 \leq t \leq 1-s/2 \\ \alpha(2t-1) * \Big(e * \big(\overline{\alpha}(2t-1) * e\big)\Big) & \text{si} \quad t \geq 1-s/2 \end{cases}$$

sont continues.

b) Montrer que dans le groupe fondamental $\pi_1(X, e)$, le produit d'un couple $([\alpha], [\beta])$ de classes d'homotopies de lacets d'origine e est égal à la classe d'homotopie du lacet $t \mapsto \alpha(t) * \beta(t)$.

c) Montrer que le groupe $\pi_1(X, e)$ est abélien.

(2) Soient X un espace métrique pointé en x, et $\Omega(X)$ l'ensemble des lacets en x dans X, muni de la topologie de la convergence uniforme, pointé en ε_x, le lacet constant en x.

a) Si $f : X \to Y$ est une application continue pointée, où Y est un espace métrique pointé, montrer que l'application $\Omega f : \Omega(X) \to \Omega(Y)$ définie par $\alpha \mapsto f \circ \alpha$ est aussi une application continue pointée. Montrer que Ω est un foncteur de la catégorie des espaces métriques pointés, et des applications continues pointées, dans elle-même. Montrer que si X et Y ont le même type d'homotopie, alors $\Omega(X)$ et $\Omega(Y)$ ont le même type d'homotopie.

b) Montrer que l'espace topologique pointé $\Omega(X)$, muni de la concaténation des lacets, est un H-espace. Pour $i \geq 2$, notons par récurrence $\pi_i(X) = \pi_{i-1}\big(\Omega(X)\big)$. Montrer que $\pi_i(X)$ est un groupe abélien pour $i \geq 2$, et calculer $\pi_i(X)$ si X est contractile.

(3) a) Soit G un groupe topologique, connexe et localement connexe par arcs, d'élément neutre e. Montrer que son groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ est abélien.

[1] H est l'une des deux initiales de Heinz Hopf (1894-1971)

b) Soient $\widehat{G}$ un groupe topologique connexe et $\pi : \widehat{G} \to G$ un morphisme de groupes, qui est un revêtement. Montrer que le noyau de π est un sous-groupe distingué, discret de $\widehat{G}$, contenu dans le centre de $\widehat{G}$. Montrer que π est galoisien.

c) Soient G et H deux groupes topologiques compacts, et $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes topologiques, surjectif, de noyau discret. Montrer que φ est un revêtement.

(4) a) En notant $x^* = {}^t\overline{x}$ la matrice transconjuguée d'une matrice x, montrer que le sous-groupe topologique $\mathrm{SU}(2) = \{x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \ : \ xx^* = x^*x = \mathrm{id}\}$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.

b) Soit V l'espace vectoriel réel des matrices v carrées complexes de taille 2, anti-hermitiennes ($v = -v^*$) et de trace nulle. Montrer que $(v, v') \mapsto \mathrm{Trace}(v^*\, v')$ est un produit scalaire euclidien sur V, qui est invariant par l'action par conjugaison $(g, v) \mapsto gvg^{-1}$ de $\mathrm{SU}(2)$ sur V. En déduire l'existence d'un revêtement $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$. Quel est le groupe fondamental de $\mathrm{SO}(3)$?

(5) a) En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathrm{SO}(3)$ et $T^1\mathbb{S}_2 = \{(x,v) \in \mathbb{S}_2 \times \mathbb{R}^3 \ : \ ||v|| = 1, \langle x, v \rangle = 0\}$ sont homéomorphes, et calculer le groupe fondamental de $T^1\mathbb{S}_2$.

b) En déduire le *théorème de non peignage de la sphère*[2] : il n'existe pas de champ continu de vecteurs tangents à la sphère $\mathbb{S}_2$ ne s'annulant en aucun point.

$\boxed{\text{Exercice II}}$ Notons $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ le cercle, bord du disque $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$ (fermé), $\mathbb{S}_2 = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \ : \ |z|^2 + t^2 = 1\}$ la sphère de dimension 2, $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ le plan projectif réel, pointé en l'image x_* de $(1,0)$ par la projection canonique de $\mathbb{S}_2$ dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_2/_{x \sim \pm x}$, et P_1, P_2 deux copies de ce plan projectif.

(1) Calculer le groupe fondamental du bouquet de deux plans projectifs $Y = P_1 \vee P_2$.

(2) Notons $p_1 : \mathbb{S}_2 \to P_1$ et $p_2 : \mathbb{S}_2 \to P_2$ les projections canoniques sur les deux copies du plan projectif, et $f : \mathbb{S}_1 \to Y$ l'application définie par $f(z) = p_1(z^8, 0)$ si $\mathrm{Im}(z^8) \geq 0$ et $f(z) = p_2(z^8, 0)$ si $\mathrm{Im}(z^8) \leq 0$.

a) Calculer le groupe fondamental de l'espace topologique $X = \overline{\mathbb{D}} \cup_f Y$, recollement du disque $\overline{\mathbb{D}}$ sur Y par l'application $f : \mathbb{S}_1 \to Y$.

b) Déterminer, à isomorphisme de revêtements près, tous les revêtements connexes de X, et dire ceux qui sont galoisiens et ceux qui ne le sont pas.

[2] ou pourquoi se peigner le matin sans épi est impossible...