FIMFA 2$^{\text{e}}$ année
Topologie algébrique — examen partiel— 26 novembre 2007
Corrigé

1. Soit X un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. Supposons que tout élément de $\pi_1(X)$ soit d'ordre fini dans le groupe. Montrer que toute application continue $f : X \longrightarrow S^1$ est homotope à une application constante.

> Soit $f : X \longrightarrow S^1$ une application continue. On choisit $x_0 \in X$, et $y_0 = f(x_0) \in S^1$. Pour tout $g \in \pi_1(X, x_0)$, g est d'ordre fini, donc $g^n = 1$ pour un certain $n > 0$, et cela entraîne que $f_\#(g) = 1 \in \pi_1(S^1, y_0)$. Donc $\mathrm{Im}(f_\#) = \{1\}$.
>
> Soit $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ l'application $p(x) = e^{2\pi i x}$. Par un théorème du cours, puisque $\mathrm{Im}(f_\#) = \{1\}$, il existe $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $p \circ \widetilde{f} = f$. Puisque $\mathbb{R}$ est contractile, $\widetilde{f}$ est homotope à une application constante c, ce qui entraîne que $f = p \circ \widetilde{f}$ est homotope à l'application constante $p \circ c$.

2. Soit $X = U_1 \cup U_2$ un espace topologique, où U_1 et U_2 sont ouverts dans X, connexes par arcs, et simplement connexes ($\pi_1(U_i) = 1$). Supposons que $U_1 \cap U_2 = V \amalg W$ (réunion disjointe), où V et W sont ouverts dans X, non-vides, et connexes par arcs. On choisit des éléments $v_0 \in V$ et $w_0 \in W$, et deux chemins $\gamma_i : (I, 0, 1) \longrightarrow (U_i, v_0, w_0)$ $(i = 1, 2)$ de v_0 vers w_0.

(a) Montrer, pour chaque lacet $\phi : (I, \partial I) \longrightarrow (X, v_0)$, qu'il existe un lacet $\psi \simeq \phi$ (rel ∂I) et une partition $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, tels que $\psi([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_1$ ou $\psi([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_2$ pour tout $0 \le i \le n-1$, et que $\psi(t_i) \in \{v_0, w_0\}$ pour tout $0 \le i \le n$.

> Puisque $I = [0, 1]$ est compact, il existe $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ et $\lambda : \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tels que $\phi([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_{\lambda(i)}$ pour tout i. On peut supposer que $\phi(t_i) \in U_1 \cap U_2$ pour tout i; sinon $\lambda(i-1) = \lambda(i)$, et on peut supprimer t_i de la liste.
> Pour tout $0 \le i \le n$, on choisit un chemin $\psi_i : (I, 0, 1) \longrightarrow (U_1 \cap U_2, \{v_0, w_0\}, \phi(t_i))$. Donc $\psi_i(0) = v_0$ si $\phi(t_i) \in V$ et $\psi_i(0) = w_0$ si $\psi(t_i) \in W$. Les chemins ψ_0 et ψ_n sont supposés le chemin constant à valeur v_0.
> Pour tout $i = 0, 1, \ldots, n-1$, on définit $\phi_i : (I, 0, 1) \longrightarrow (U_{\lambda(i)}, \phi(t_i), \phi(t_{i+1}))$ par $\phi_i(t) = \phi(t_i + t(t_{i+1} - t_i))$. Soit ψ le chemin
>
> $$\psi(t) = (\psi_i \cdot \phi_i \cdot \overline{\psi_{i+1}})\Big(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\Big) \qquad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}].$$
>
> Alors ψ satisfait aux conditions imposées: $\psi([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_{\lambda(i)}$ pour tout i, et $\psi(t_i) \in \{v_0, w_0\}$. En outre,
>
> $$\begin{aligned} \phi &\simeq \phi_0 \cdot \phi_1 \cdots \phi_{n-1} \\ &\simeq (\psi_0 \cdot \phi_0 \cdot \overline{\psi_1}) \cdot (\psi_1 \cdot \phi_1 \cdot \overline{\psi_2}) \cdots (\psi_{n-2} \cdot \phi_{n-2} \cdot \overline{\psi_{n-1}}) \cdot (\psi_{n-1} \cdot \phi_{n-1} \cdot \overline{\psi_n}) \\ &\simeq \psi \qquad\qquad (\mathrm{mod}\ \partial I) \end{aligned}$$

(b) Montrer que $\pi_1(X, v_0)$ est engendré par la classe du lacet $\gamma_1 \cdot \overline{\gamma_2}$.

> Soit ψ le lacet de (a). Pour tout i, $\psi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ est soit un lacet dans U_1 ou U_2, soit un chemin dans U_1 ou U_2 de v_0 à w_0 ou de w_0 à v_0. Puisque U_1 et U_2 sont simplement connexes, tout lacet est homotope à un lacet constant, et tout chemin dans U_1 ou dans U_2 entre v_0 et w_0 est homotope (rel ∂I) à un des chemins γ_1, γ_2, $overline \gamma_1$, ou $overline \gamma_2$. On peut supprimer les lacets, ce qui entraîne que $\psi(t_i) = v_0$ pour i pair et w_0 pour i impair, et donc que
>
> $$\psi \simeq (\gamma_{j_1} \cdot \overline{\gamma_{j_2}}) \cdot (\gamma_{j_3} \cdot \overline{\gamma_{j_4}}) \cdots (\gamma_{j_{2k-1}} \cdot \overline{\gamma_{j_{2k}}}) \qquad (\mathrm{rel}\ \partial I)\ .$$
>
> Après avoir éliminé les couples $\gamma_i \cdot \overline{\gamma_i}$ et $\overline{\gamma_i} \cdot \gamma_i$, ce qui reste est une puissance de $\gamma_1 \cdot \overline{\gamma_2}$, ou de $\gamma_2 \cdot \overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_1 \cdot \overline{\gamma_2}}$.

(c) Construire un revêtement $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ tel que $\widetilde{X}$ soit connexe par arcs et $p^{-1}(v_0)$ soit infini.

On définit
$$\widetilde{X} = \big((U_1 \times \mathbb{Z}) \amalg (U_2 \times \mathbb{Z})\big)/\mathcal{R},$$
où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendré par $(u_1, n_1)_1 \mathcal{R} (u_2, n_2)_2$ si $u_1 = u_2 \in V$ et $n_1 = n_2 + 1$, ou $u_1 = u_2 \in W$ et $n_1 = n_2$. Ici, $(x, n)_i \in U_i \times \mathbb{Z}$ (pour $i = 1, 2$) note l'élément de la réunion disjointe, et $[x, n]_i$ note sa classe dans $\widetilde{X}$. On donne à $\widetilde{X}$ la topologie quotient. Soit $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ l'application définie par $p((x, n)_i) = x$ pour $(x, n) \in U_i \times \mathbb{Z}$; p est continue par la propriété universel de la topologie quotient.

Pour $i = 1, 2$, $p^{-1}(U_i) = \{[u, n]_i \,|\, u \in U_i,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Pour chaque n, l'application $U_i \longrightarrow \widetilde{X}$ qui envoie $u \in U_i$ vers $[u, n]_i$ est continue (la composée de l'inclusion dans $U_i \times \mathbb{Z}$ suivi par la projection vers l'espace quotient). Cela montre que $p^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{Z}$, une réunion disjointe de copies de U_i, dont chacune s'envoie homéomorphiquement sur U_i. Par conséquent, p est un revêtement. Par construction, $p^{-1}(v_0) = \{[v_0, n]_1\}$ est infini.

Il reste à montrer que $\widetilde{X}$ est connexe par arcs. Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{X}$ l'application
$$\psi(n + t) = \begin{cases} [\gamma_1(2t), n]_1 & \text{si } n \in \mathbb{Z},\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ [\gamma_2(2 - 2t), n]_2 & \text{si } n \in \mathbb{Z},\ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$
Alors ψ est bien définie et continue, ce qui entraîne qu'il y a un chemin de $[v_0, 0]_1$ vers chaque élément $[v_0, n]_i$ et $[w_0, n]_i$. Puisque chaque sous-espace $U_i \times \mathbb{Z}$ est connexe par arcs, il s'ensuit que $\widetilde{X}$ est connexe par arcs.

(d) Conclure que $\pi_1(X, v_0) \cong \mathbb{Z}$: un groupe cyclique infini.

Par (b), $\pi_1(X, v_0)$ est cyclique (monogène). Par un théorème du cours, il y a une surjection de $\pi_1(X, v_0)$ sur $\pi^{-1}(v_0)$, donc $\pi_1(X, v_0)$ est infini par (c). On conclut que $\pi_1(X, v_0) \cong \mathbb{Z}$.

3. Soient $T \subseteq \{(n, 0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$, $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus T$, et $x_0 = (0, 1) \in X$.

(a) Supposons que T soit fini. Montrer que $\pi_1(X, x_0)$ est de type fini.

Soient $T_0 = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, (n, 0) \in T\}$ et
$$U_n = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(n, 0)\} \,\big|\, y > 0 \text{ ou } |x - n| < 1\big\}$$
$$V_T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y > 0 \text{ ou } x \notin T_0\big\}.$$
Alors $X = V_T \cup \bigcup_{n \in T_0} U_n$, et chaque intersection $\bigcap_{n \in T_1} U_n$ et $V_t \cap \bigcap_{n \in T_1} U_n$ (pour $T_1 \subseteq T_0$) est non-vide et connexe par arcs. En outre, chaque U_n a le type d'homotopie d'un cercle, et V_T est contractile. Par le théorème de van Kampen, $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par les images des $\pi_1(U_n, x_0) \cong \mathbb{Z}$ et de $\pi_1(V_T, x_0) \cong \{1\}$, donc de type fini.

(b) Supposons que T soit infini. Montrer que $\pi_1(X, x_0)$ n'est pas de type fini. (Indication: l'image d'un lacet est compact.)

Supposons le contraire: soient $\phi_1, \ldots, \phi_m$ des lacets dans X tels que les classes $[\phi_i]$ engendrent $\pi_1(X, x_0)$. Chaque $\mathrm{Im}(\phi_i)$ est compact, donc borné, ce qui entraîne qu'il existe $N > 0$, tel que $\mathrm{Im}(\phi_i) \subseteq B_N(0, 0)$ (la boule ouverte de rayon N) pour tout i.

Puisque T est infini, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > N$ et $(n, 0) \in T$. Considérons les deux ouverts suivants:
$$U = \big\{(x, y) \in X \,\big|\, y > 0 \text{ ou } x \neq n\big\}$$
$$V = \big\{(x, y) \in X \,\big|\, y > 0 \text{ ou } |x - n| < 1\big\}\ .$$
Alors $\mathrm{Im}(\phi_i) \subseteq U$ pour tout i, et donc l'inclusion $U \subseteq X$ induit une surjection de $\pi_1(U, x_0)$ sur $\pi_1(X, x_0)$. En outre, $U \cup V = X$, $U \cap V$ est contractile, et $\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$ ($V \simeq S^1$). Donc $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \mathbb{Z}$ par le théorème de van Kampen, ce qui montre que $\pi_1(U, x_0)$ ne surjecte pas sur $\pi_1(X, x_0)$. Ceci étant une contradiction, on en conclut que $\pi_1(X, x_0)$ n'est pas de type fini.