Corrigé succint de l'Examen de Topologie Algébrique Élémentaire du 28 janvier 2010.

Pour un espace topologique non-vide X et $\gamma, \beta : [0,1] \to X$ des chemins dans X tels que $\gamma(1) = \beta(0)$, on notera $\gamma * \beta$ le chemin $[0,1] \to X$ obtenu en les concaténant. Autrement dit $\gamma * \beta(t) = \gamma(2t)$ si $t \leq 1/2$ et $\gamma * \beta(t) = \beta(2t-1)$ si $t \geq 1/2$. D'après le cours, l'opération $*$ ainsi définie est associative à homotopie près. Si γ et β sont des lacets (pointés en $x_0 \in X$), cette opération induit la structure de groupe de $\pi_1(X, x_0)$.

Exercice 1. (CW-complexes, caractéristique d'Euler et topologie des surfaces)

1. *(Caractéristique d'Euler)* Soit X un CW-complexe fini et $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une décomposition cellulaire de X. On rapelle que la caractéristique d'Euler $\chi(X, \mathbb{K})$ de X à valeur dans un corps $\mathbb{K}$ est l'entier
$$\chi(X, \mathbb{K}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \, dim(H_i(X, \mathbb{K})).$$
   (a) Démontrer que les groupes d'homologie $H_i(X, \mathbb{K})$ sont de dimension finies et nulles pour i assez grand. En déduire que $\chi(X, \mathbb{K})$ est bien défini.
   (b) Démontrer que $\chi(X, \mathbb{K}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \, dim\big(CW_i(X, \mathbb{K})\big)$ où $CW_*(X, \mathbb{K})$ est le complexe cellulaire de X.
   (c) Démontrer que $\chi(X, \mathbb{K})$ est indépendant du corps $\mathbb{K}$. On notera désormais simplement $\chi(X)$ la caractéristique d'Euler.
   (d) Soit A, B des sous-complexes cellulaires de X tels que $X = A \cup B$. Démontrer que $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.
   (e) Soit $f : X \to Y$ un revêtement entre deux CW-complexes tel que X soit fini et Y connexe. Montrer que f est un revêtement fini à nombre de feuilles constantes et déterminer la caractéristique d'Euler de X en fonction de celle de Y.

2. *(A propos de Tores à g-trous)* On appelera Tore à g trous (ou Tore de genre g), la somme connexe $T\# \cdots \#T$ de g tores $T = S^1 \times S^1$.
   (a) Déterminer les groupes d'homologie (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) d'un Tore à g trous et déterminer sa caractéristique d'Euler en fonction de g.
   (b) Existe-t-il des revêtements d'un Tore à 3 trous par un tore à 6 trous ? D'un Tore à 3 trous par un Tore à 7 trous ? Justifier votre réponse !

3. *(une surface non-orientable)* Soit $X = T\#\mathbb{R}P^2$ la somme connexe d'un tore $T = S^1 \times S^1$ et d'un plan projectif réel.
   (a) Calculer les groupes d'homologie $H_n(X, \mathbb{Z})$ et $H_n(X, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.
   (b) Existe-t-il des revêtements de X par un Tore $S^1 \times S^1$?
   (c) Déterminer le revêtement universel de X.

Solution 1. 1. Notons $\alpha_i(X)$ le nombre de cellules de dimension i d'un CW-complexe X. Rappelons pour commencer que les groupes d'homologie $H_i(X, \mathbb{K})$ d'un CW-complexe X sont naturellement isomorphes aux groupes d'homologie $H_i(CW_*(X, \mathbb{K}), \partial)$ du complexe cellulaire $CW_*(X, \mathbb{K})$ de X (ici $\partial : CW_*(X, \mathbb{K}) \to CW_{*-1}(X, \mathbb{K})$ désigne la différentielle de ce complexe). En degré i, $CW_i(X, \mathbb{K})$ est isomorphe au $\mathbb{K}$-espace vectoriel $K^{\alpha_i(X)}$ engendré par les cellules de dimension i de X; d'après le cours, on a en fait des isomorphismes naturels $CW_i(X, A) = H_i(X^{(i)}, X^{(i-1)}, A) \cong H_i(\bigvee_{\alpha_i(X)} S^i, *, A) \cong A^{\alpha_i(X)}$ pour tout groupe abélien A.

(a) *(Caractéristique d'Euler)* Par hypothèse, X étant fini, chaque $\alpha_k(X)$ est fini, donc $CW_k(X,\mathbb{K})$ est de dimension finie. Comme $H_i(CW_*(X,\mathbb{K}))$ est obtenu en prenant un quotient d'un sous-espace de $CW_i(X,\mathbb{K})$, il est également de dimension finie (plus petite que $\alpha_i(X)$). De plus, comme X est fini, $\alpha_k(X)$ est nul à partir d'un certain rang. Il suit que la somme $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\, dim(H_i(X,\mathbb{K}))$ est une somme finie d'entiers, donc un entier bien défini.

(b) Il s'agit essentiellement du théorème du rang: en notant a_i la dimension de $\partial(CW_i(X,\mathbb{K})) \subset CW_{i-1}(X,\mathbb{K})$ (en particuliaer $a_0 = 0$) et b_i la dimension de $ker(CW_i(X,\mathbb{K}) \xrightarrow{\partial} CW_{i-1}(X,\mathbb{K}))$, on remarque que

$$dim(H_i(X,\mathbb{K})) = dim(H_i(CW_*(X,\mathbb{K}))) = b_i - a_{i+1}$$

et de plus $\alpha_i = dim(CW_i(X,\mathbb{K})) = a_i + b_i$. On en déduit alors que la somme alternée (qui est une somme finie)

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(b_i - a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(b_i + (-1)^{i+1}a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(b_i + a_i)$$

ce qui est la formule demandée.

(c) On a $dim(CW_i(X,\mathbb{K}))$ qui est égal au nombre de cellules de dimension i, donc est indépendant de $\mathbb{K}$. Par la question précédente c'est donc le cas de la caractéristique d'Euler également.

(d) On note $(A^{(n)})_{n\geq 0}$ et $(B^{(n)})_{n\geq 0}$ les filtrations cellulaires de A et B qui vérifient, par hypothèse, $A^{(n)} \subset X^{(n)}$ et $B^{(n)} \subset X^{(n)}$ pour tout $n \geq 0$. Toute cellule $e \subset A^{(n)} \cap B^{(n)}$ est obtenue en recollant un disque D^n sur $X^{(n-1)}$ via une application de recollement $f : S^{n-1} \to X^{(n-1)}$. Comme A et B sont des sous-complexes, f a son image dans à la fois $A^{(n-1)}$ et $B^{(n-1)}$. Il suit que $A \cap B$ muni de la filtration $(A\cap B)^{(n)} := A^{(n)} \cap B^{(n)}$ est un sous-CW-complexe de X (et de A et B). Il est de plus fini puisque X l'est. On peut donc bien définir $\chi(A \cap B)$. Par ailleurs, comme $X = A \cup B$, les cellules de dimension n de X se partitionent en celles qui sont dans $A \cap B$, celles qui sont dans $A \setminus (A \cap B)$ et celles qui sont dans $B \setminus (A\cap B)$. Il suit que $\alpha_n(X) = \alpha_n(A) + \alpha_n(B) - \alpha_n(A \cap B)$ et on en déduit le résultat.

On peut également retrouver ce résultat en appliquant la formule de Mayer-Vietoris; pour ce faire, il convient de remarquer que l'on peut grossir légérement A en un ouvert qui est un rétract par déformation de A (c'est facile car X est un CW-complexe et A un sous-complexe) et de même pour B. Appliquant le théorème du rang une nouvelle fois comme dans la question (b), on déduit alors le résultat demandé (cf l'exercice 2 de la feuille de TD 4 également).

(e) Comme X est un CW-complexe *fini*, il est compact. Il suit que les fibres du revêtement f sont des compacts discrets (ce sont des fermés puisque Y est séparé) donc sont finies. Par connexité de Y, leur cardinal est constant. Notons le k. Notons que X compact et le fait que $X \xrightarrow{f} Y$ soit surjective dans Y, séparé, implique que Y est aussi compact.

La structure de CW-complexe de Y se relève (de manière unique) en une structure cellulaire sur X qui fasse de f une application cellulaire. En effet, notons $Y^{(n)}$ le n-squelette de Y. On pose $X^{(0)} = f^{-1}(Y^{(0)})$ qui est un compact discret (puisque $Y^{(0)}$ l'est). Il est clair que $f(X^{(0)}) \subset Y^{(0)}$. Soit $e_1 \subset Y^{(1)}$ une 1-cellule de Y. Elle est obtenue en recollant le bord de $D^1 = [0,1]$ sur $Y^{(0)}$. On note $q_1 : D^1 = [0,1] \to Y$ l'application ainsi obtenue (qui est un homéorphisme de $]0,1[$ sur la cellule ouverte $\mathring{e_1}$). Comme D^1 est simplement connexe, pour tout choix de $x_0 \in f^{(-1)}(q_1(0))$, cette application se relève en une unique application $p_1 : [0,1] \to X$ vérifiant $f(0) = x_0$ et $f \circ p_1 = q_1$. Il suit de cette dernière identité que $f^{-1)}(1) \in X^{(0)}$. On a ainsi obtenu que $X^{(1)} = f^{-1}(Y^{(1)}$ est un CW-complexe de dimension 1 dont les 1-cellules sont données par les applications p_1 (on a fait varier suivant toutes les possibilités le relevé x_0 et la 1-cellule q_1 de Y). De plus $f_{|X^{(1)}}$ est cellulaire. On itére ensuite la construction précédente en remarquant que les disques D^n de dimension i sont aussi simplement connexes. Par construction, il y a k-cellules de dimension i dans X au dessus d'une seule cellule de dimension i de Y; en effet, une telle cellule est uniquement déterminée par le choix du relevé du point base de la cellule de Y. Par conséquent, $\alpha_n(X) = k\alpha_n(Y)$ pour tout $n \geq 0$ et donc

$$\chi(X) = k \cdot \chi(Y).$$

2. *(A propos de Tores à g-trous)* On note T^g le tore à g-trous.

(a) Le tore T^g à g-trous est le quotient d'un polygone à $4g$ côtés par une relation identifiant des paires de côtés (comme rappelé avant l'examen; faire un dessin). On peut noter les $2g$ cercles ainsi obtenus $(a_i)_{i=1}^g$ et $(b_i)_{i=1}^g$ de telle sorte que lorsque l'on parcourt le bord du $4g$-gon initial on décrive le chemin

$$\gamma := a_1 * b_1 * a_1^{-1} * b_1^{-1} * \cdots * a_g * b_g * a_g^{-1} * b_g^{-1}.$$

Ceci munit le quotient d'une structure de CW-complexes avec un seul sommet, $2g$ cellules de dimension 1 et une seule cellule de dimension 2, recollé sur les 2g-cellules par le chemin γ ci-dessus. D'après la question 1).(b), on obtient immédiatement

$$\chi(T^g) = 1 - 2g + 1 = 2(1-g).$$

Par ailleurs le complexe cellulaire de T^g est le complexe

$$CW_*(T^g) := \cdots 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{i=1}^{g} (\mathbb{Z}a_i \oplus \mathbb{Z}b_i) \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \to 0.$$

Puisque chaque cellule a_i ou b_j est un cercle, on obtient que $\partial_1 = 0$ (les deux extrémités des 1-cellules sont envoyées sur la même 0-cellule). Il nous faut donc calculer ∂_2. Pur cela il suffit de regarder chacune les projections $\mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} CW_1(T^g, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}a_i$ (et celles sur $\mathbb{Z}b_j$). D'après le cours cette application est donnée par la multiplicatin par le degré de l'application obtenue en parcourant le bord de la 2-cellule et en projetant sur le cercle correspondant à a_i dans $(T^g)^{(1)}/(T^g)^{(0)}$, c'est à dire la composée $S^1 \xrightarrow{\gamma} \bigvee_{i=1}^g (a_i \vee b_i) \to a_i \cong S^1$ (ici on a un peu abusivement identifié les chemins a_i, b_j avec des cercles). Par définition de γ cette composée est obtenue en parcourant une fois le cercle a_i puis une fois le cercle a_i dans le sens inverse (et en restant constante le reste du temps). Elle est donc homotope à l'application $a_i * a_i^{-1}$ qui est homotope à l'application identité, donc de degré nul. Il suit que $\partial_2 = 0$ et donc, on obtient

$$H_0(T^g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(T^g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_2(T^g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_{i\geq 3}(T^g, \mathbb{Z}) = 0.$$

Le seul point important dans le calcul ci-dessus était le calcul de ∂_2, c'est à dire l'image de $\gamma_* : H_1(S^1, \mathbb{Z}) \to H_1(\bigvee_{i=1}^{2g} S^1, \mathbb{Z})$. En fait, on peut aussi obtenir le résultat précédent en appliquant plusieurs fois la longue suite exacte de Mayer-Vietoris à partir du Tore privé d'un disque (qui est homotope à $S^1 \vee S^1$). Là encore, le seul point non-immédiat revient à calculer $\gamma_* : H_1(S^1, \mathbb{Z}) \to H_1(\bigvee_{i=1}^{2g} S^1, \mathbb{Z})$ (et à réaliser que cette application est nulle, ce qui se fait comme ci-dessus pour calculer ∂_2).

(b) Les Tores étant des CW-complexes, si un revêtement de T^g par T^h existe, il doit exister un entier $k \geq 1$ tel que $\chi(T^h) = k \cdot \chi(T^g)$. Or $\chi(T^3) = -4$ et $\chi(T^6) = -10$. Donc il n'y a pas de revêtements de T^3 par T^6. En revanche, $\chi(T^7) = -12$ montre que si un revêtement de T^3 par T^7 existe, il doit être à 3-feuillets. Un tel revêtement est effectivement possible. Pour le voir, on met un "trou" de T^7 au centre (par exemple après l'avoir plongé dans $\mathbb{R}^3$) et considère 1 branche contenant chacune 2 "trous" et ses images par une rotation d'ordre 3 (c'est à dire d'angle $2\pi/3$). Le quotient par l'action du sous-groupe de rotation d'ordre 3 est alors un tore à 3 trous (Faire impérativement un dessin pour comprendre ce dernier paragraphe).

3. *(une surface non-orientable)*

(a) On peut appliquer la longue suite exacte de Mayer-Vietoris à $T\#\mathbb{R}P^2$ en prenant des ouverts U et V respectivement homéomorphes à $T\setminus D^2$ un tore privé d'un disque et $\mathbb{R}P^2\setminus D^2$ le plan projectif privé d'un disque, et tels que l'intersection $U\cap V$ est un cylindre (donc homotope à un cercle). On commence par calculer l'homologie de $T\setminus D^2$. Cet espace se rétracte par déformation sur son 1-squelette et c'est aussi le cas de $\mathbb{R}P^2\setminus D^2$ (faire des dessins, par exemple à partir du carré dont on a identifié les bords opposé pour s'en convaincre). Il suit que $T\setminus D^2$ est homotope au bouquet de deux cercles $S1\vee S^1$ et$\mathbb{R}P^2\setminus D^2$ est homotope au quotient du cercle S^1 par l'application antipodale[1], qui est le revêtement connexe de degré 2 de S^1. Il suit que $\mathbb{R}P^2\setminus D^2$ est homotope à S^1. Comme l'homologie de S^1 et de $S^1\vee S^1$ est triviale en degré 2 et plus (quel que soit l'anneau de coefficient), on déduit immédiatement de la longue suite exacte de Mayer-Vietoris que $H_{i\geq 3}(T\#\mathbb{R}P^2, A)=0$ pour tout anneau de coefficient A. Par connexité par arcs de $T\#\mathbb{R}P^2$, la longue suite exacte de Mayer-Vietoris (pour l'homologie à coefficient dans A) se réduit alors à:

$$0\to H_2(T\#\mathbb{R}P^2,A)\to A\xrightarrow{\phi}(A\oplus A)\oplus A\to H_1(T\#\mathbb{R}P^2,A)\xrightarrow{\psi}A\to A\oplus A\to A\to 0$$

où $\phi : A\cong H_1(U\cap V)\to H_1(U,A)\oplus H_1(V,A)\cong (A\oplus A)\oplus A$ est l'application induite sur chaque facteur par les inclusions de $U\cap V$ dans U et V. Comme tous les espaces considérés sont connexes par arcs, la suite $A\to A\oplus A\to A\to 0$ de droite est exacte et sa première flèche est injective. Il suit que $H_1(T\#\mathbb{R}P^2,A)\xrightarrow{\psi}A$ est nulle. Pour conclure, il nous faut comprendre ϕ. Le générateur de $H_1(U\cap V)=H_1(S^1)=A$ est donné par le cycle correspondant à un cercle homotope au bord du disque D^2 que l'on a retiré dans U (et V) (faire un dessin...). Plongé dans $S^1\vee S^1$ ce cercle est homotope à $a{*}b{*}a^{-1}{*}b^{-1}$ où a,b sont les générateurs de chacun des cercles du bouquet. Donc l'image dans $H_1(U)=H_1(S^1\vee S^1)=A\oplus A$ du générateur de $H_1(S^1)$ est la classe $[a]+[b]-[a]-[b]=0$ (c'est le même calcul que pour l'application bord ∂_2 de la question 2.(a) ci-dessus sur l'homologie des tores à g-trous; on peut aussi invoquer si on préfère le fait que l'homologie est l'abélianisé du groupe fondamental et que le morphisme de Hurewicz $\pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$ est un morphisme de groupes). En revanche, ce même générateur est homotope dans $V\cong\mathbb{R}P^2\setminus D^2\sim S^1$ au lacet $c*a(c)$ où c est le cercle S^1 et $a(c)$ est le lacet obtenu en composant par l'antipode $S^1\to S^1$. Comme celle-ci est homotope à l'identité, il suit que $c*a(c)$ est un lacet de degré 2 (là encore on pourrait invoquer directement l'isomorphisme de Hurewicz et le fait que l'application $S^1\to S^1/\pm id\cong S^1$ est un revêtement de degré 2). Il suit que l'application $A=H_1(U\cap V)\to H_1(U)\oplus H_1(V)\xrightarrow{pr_2}H_1(V)=A$ est la multiplication par 2 (pr_2 désigne la projection sur le deuxième facteur).

Finalement on a montré que $A\xrightarrow{\phi}(A\oplus A)\oplus A$ est l'application $\phi(a)=(0,0,2a)$. Lorsque $A=\mathbb{Z}$, l'application ϕ est donc injective et le quotient $(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})\oplus\mathbb{Z}/\phi(\mathbb{Z})$ est $\mathbb{Z}^2\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Lorsque $A=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, l'application ϕ est toujours injective, mais de plus la multiplication par 2 dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est bijective. Il suit que

$$H_0(T\#\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z})=\mathbb{Z},\quad H_1(T\#\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^2\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\quad H_{i\geq 2}(T\#\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z})=0$$

$$H_0(T\#\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\quad H_1(T\#\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z})=(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2,\quad H_{i\geq 2}(T\#\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})=0.$$

(b) On remarque que la caractéristique d'Euler de $T\#\mathbb{R}P^2$ est -1 alors que celle du Tore est nulle. On en conclut comme dans la question 2.(c) qu'il n'y a aucun revêtement de $T\#\mathbb{R}P^2$ par le Tore (on pourra se rappeler qu'il y a des revêtements de la bouteille de Klein, autre surface non-orientable, par un Tore).

[1] définie par $z\mapsto -z$ si on identifie S^1 avec $\{z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$

(c) L'idée, ici, est de remarquer que l'on peut trouver un revêtement de $T\#\mathbb{R}P^2$ par un tore à 2 trous T^2. En effet, $T\#\mathbb{R}P^2$ est obtenu en collant un cylindre entre un tore privé d'un disque D_1 et le quotient de la sphère privée d'un disque D_2 par l'application antipodale. En enlevant l'image antipodale du disque D_2 sur la sphère précédente et en recollant dessus une copie miroir (par la symétrie antipodale) du Tore privé de D^1, on obtient un Tore à 2-trous (faire un dessin...). L'application antipodale est alors un automorphisme de degré 2 qui agit librement et fournit un revêtement de degré 2 de $T\#\mathbb{R}P^2$. Il suit que $T\#\mathbb{R}P^2$ et T^2 ont le même revêtement universel, soit $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. (cercles dans une surface de genre 2) Soit $X = T\#T$ (où $T = S^1 \times S^1$) un tore à 2 trous. Soient A, B deux cercles plongés dans X comme dans la figure ci-dessous.

X et le cercle A $\qquad$ X et le cercle B $\qquad$ (0.1)

1. Calculer les groupes d'homologie relative $H_i(X, A, \mathbb{Z})$ et $H_i(X, B, \mathbb{Z})$ (pour tout $i \geq 0$).
2. Existe-t-il des homéomorphismes de X qui échangent A et B ?

Solution 2. Pour alléger la notation, on omet le groupe abélien des coefficients (qui est $\mathbb{Z}$) dans les notations.

1. Il y a plusieurs méthodes pour répondre à cette question. On peut considérer une structure de CW complexe telle que A et B soient des sous-complexes et utiliser le complexe cellulaire. On peut aussi utiliser la longue suite exacte d'une paire. Utilisons cette dernière méthode. Rappelons que $H_i(A) = H_i(B) = \mathbb{Z}$ si $i = 0, 1$ et est nul si $i \geq 2$. De même, d'après l'exercice 1, $H_2(X) \cong H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^4$ avec pour base les générateurs a_1, b_1, a_2, b_2 du groupe fondamental de X. Enfin $H_{i>2}(X) = 0$. Les générateurs a_i, b_j forment le 1-squelette de X et correspondent aux arêtes de "l'octogone" (après identification des arêtes 2 à 2) dont X est le quotient.

   La longue suite exacte de la paire (X, A) en homologie s'écrit donc

   $$\cdots 0 \to H_3(X, A) \to 0 \to \mathbb{Z} \to H_2(X, A) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}^4 \to H_1(X, A) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to H_0(X, A) \to 0.$$

   Ici $i_* : \mathbb{Z} = H_1(A) \to H_1(X) = \mathbb{Z}^4$ est l'application induite en homologie par l'inclusion $i : A \hookrightarrow X$. La dernière flèche de droite est l'identité puisque A et X sont connexes par arcs; on retrouve donc que $H_0(X, A) = 0$. De plus la longue suite exacte donne immédiatement que $H_i(X, A) \cong 0$ si $i \geq 3$. On est donc ramené à étudier la suite exacte

   $$0 \to \mathbb{Z} \to H_2(X, A) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}^4 \to H_1(X, A) \to 0.$$

   La flèche i_* se calcule comme dans la question 3.(a) de l'exercice 1. Il suffit de déterminer l'image du générateur de $H_1(A)$ (qui par le théorème d'Hurewicz est le générateur de $\pi_1(A)$, c'est à dire l'identité de A). Or le lacet A est homotope au lacet $a_1 * b_1 * a_1^{-1} * b_1^{-1}$ (qui est aussi homotope au lacet $b_2 * a_2 * b_2^{-1} * a_2^{-1}$); encore une fois, faire un dessin (d'un octogone dont on a identifié les bords pour obtenir X)! Par un raisonnement déjà vu dans l'exercice 1, ce lacet a une image nulle en homologie (bien qu'il ne soit pas trivial dans le groupe fondamental); on peut aussi appliquer une nouvelle fois Hurewicz pour obtenir ce résultat immédiatement.

Il suit que $i_* = 0$ et donc on obtient $H_2(X,A) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_1(X,A) = \mathbb{Z}^4$ et, comme on l'a déjà vu $H_i(X,A) = 0$ si $i \neq 1,2$.

Le cas de B se traite de manière similaire. On a une longue suite exacte

$$\cdots 0 \to H_3(X,B) \to 0 \to \mathbb{Z} \to H_2(X,B) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z}^4 \to H_1(X,B) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to H_0(X,B) \to 0.$$

Ici $j_* : \mathbb{Z} = H_1(B) \to H_1(X) = \mathbb{Z}^4$ est l'application induite en homologie par l'inclusion $j : B \hookrightarrow X$. On obtient encore immédiatement que $H_i(X,B) = 0$ si $i \neq 1,2$. La longue suite exacte se réduit donc à

$$0 \to \mathbb{Z} \to H_2(X,B) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z}^4 \to H_1(X,B) \to 0.$$

Cette fois, le lacet B est homotope à un des générateurs du groupe fondamental de X; disons b_2. Par le théorème d'Hurewicz (ou un raisonement immédiat en utilisant les complexes cellulaires), on obtient que j_* est injective, d'image le sous groupe $\{0,0,0\} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^4$ engendré par b_2 dans $H_1(X)$. Par conséquent, on obtient

$$H_{i\neq 1,2}(X,B) = 0, \qquad H_1(X,B) \cong \mathbb{Z}^3, \qquad H_2(X,B) \cong \mathbb{Z}.$$

2. On peut remarquer que si un tel homéomorphisme existait, alors il induirait un isomorphisme $H_i(X,A) \cong H_i(X,B)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$; ce qui est impossible vu la question précédente. On peut aussi remarquer que $X - A$ a 2 composantes connexes, alors que $X - B$ reste connexe.

Exercice 3. (réunion d'un cercle et d'une sphère) Soit $X = S^1 \vee S^2$. On notera x_0 son point base.

1. Déterminer le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$, les groupes d'homologie $H_i(X, \mathbb{Z})$ de X.
2. Déterminer un revêtement universel de X.
3. Déterminer (à isomorphisme près) les revêtements connexes de X. Dire lesquels sont galoisiens.

Solution 3. 1. Pour déterminer le groupe fondamental, on applique le théorème de Van Kampen au recouvrement de $X = S^1 \vee S^2$ par deux ouverts U et V, tel que U soit la réunion de S^1 et d'un voisinage contractile de x_0 dans S^2, et, de même, V est la réunion de S^2 et d'un voisinage contractile de x_0 dans S^1. Alors U est homotope à S^1, V à S^2 et $U \cap V$ est la réunion en un point de deux ensembles contractiles, donc est simplement connexe. Par Van-Kampen, on a immédiatement que $\pi_1(X,x_0) = \pi_1(U,x_0) * \pi_1(V,x_0)$ (où $*$ désigne ici le produit libre de groupes). Comme $V \simeq S^2$ est simplement connexe, on trouve $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(S^1,x_0) = \mathbb{Z}$.

On calcule les groupes d'homologie de la même façon, en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris à la place de Van-Kampen (par invariance par homotopie de l'homologie, les groupes d'homologie de U sont ceux du cercle et ceux de V ceux de la sphère S^2). En utilisant que U, V et X sont connexes par arcs, on obtient une suite exacte en homologie:

$$\cdots 0 \to\to H_3(X) \to 0 \to 0 \oplus \mathbb{Z} \to H_2(X) \to 0 \to \mathbb{Z} \oplus 0 \to 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$$

et on en déduit que $H_{i\geq 3}(X,\mathbb{Z}) = 0$ et $H_0(X,\mathbb{Z}) \cong H_1(X,\mathbb{Z}) \cong H_2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

2. La restriction de tout revêtement de X à S^2 est triviale par simple connexité de ce dernier. Par ailleurs, le revêtement universel de S^1 est $\mathbb{R}$ (donné par l'exponentielle). On considère l'espace topologique $\tilde{X}$ définit comme suit: $\tilde{X}$ est la réunion d'une droite réelle $\mathbb{R}$ (prise par exemple dans $\mathbb{R}^3$) et, pour chaque point entier n de $\mathbb{R}$ d'une copie de S^2 recollée en son point base x_0 sur l'entier n (*i.e.*, $\tilde{X}$ est le quotient de la réunion disjointe de $\mathbb{R}$ et $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} S^2$ par la relation

identifiant chaque point $n \in \mathbb{R}$ avec le point base de la $n^{\text{ième}}$-sphère de $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} S^2$). On conseille de faire un dessin (qu'on peut plonger dans $\mathbb{R}^3$; on peut même représenter $\mathbb{R}$ comme une "spirale infinie"). On définit une application $p : \tilde{X} \to X$ en prenant l'exponentielle sur la droite réelle et la projection triviale $\coprod S^2 \to S^2$ (donnée par" l'identité" sur chaque composante connexe de la réunion disjointe). On vérifie sans mal que cette application est continue (par exemple, elle l'est trivialement sur $\mathbb{R} \coprod \big(\coprod_{n\in\mathbb{Z}} S^2\big)$ et passe au quotient par la relation d'équivalence), surjective. C'est un revêtement; pour le vérifier, il suffit de donner des trivialisations locales pour trois types de points: ceux dans $S^1 - \{x_0\}$, ceux dans $S^2 - \{x_0\}$ et x_0. Dans les deux premiers cas, c'est immédiat en utilisant les trivialisations de l'exponentielle. Pour le troisième, on vérifie que la réunion disjointe $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \big(] - 1/4 + n, 1/4 + n[\vee S^2\big)$ est une trivialisation locale de p au dessus d'un voisinage de x_0 dans X.

Pour conclure que $\tilde{X}$ est le revêtement universel de X, il suffit de montrer que $\tilde{X}$ est simplement connexe par arcs (car X est localement simplement connexe par arcs). Pour voir cela, on remarque d'abord que tout lacet $\gamma : S^1 \to \tilde{X}$ étant d'image compacte, il se factorise, pour un certain n, au travers de $\tilde{X}_n \subset \tilde{X}$ où $\tilde{X}_n$ est la restriction de X au segment $[-n, n]$ (auquel on a collé une copie de S^2 en tout point entier $i \in [-n, n]$).

En appliquant le théorème de Van Kampen, on obtient immédiatement que $\tilde{X}_n$ est simplement connexe par arcs et donc que tout lacet $\gamma : S^1 \to \tilde{X}$ se contracte en un point. Notons que si on a retenu la forme générale du théorème de Van Kampen, vue en cours, on peut montrer directement que $\tilde{X}$ est simplement connexe par arcs, en considérant la réunion (infinie, indicée par $n \in \mathbb{Z}$) des espaces formés par la droite à laquelle on a adjoint une unique sphère au point n, qui est une réunion d'espaces simplement connexes.

Dans tous les cas, on a montré que $p : \tilde{X} \to X$ est le revêtement universel de X.

3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit l'application $\tau_n : \tilde{X} \to \tilde{X}$ qui translate chaque réel t en $t + n$ et envoie chaque sphère attachée en un point k sur la sphère attachée en $k + n$ (via l'identité). Il est clair que τ_n est un automorphisme du revêtement universel et que $\tau_n \circ \tau_m = \tau_{n+m}$. De plus, le sous-groupe engendré par τ_1 agit transitivement sur les fibres du revêtement universel. Il suit que $\pi_1(X, x_0) \cong \{\tau_n, n \in \mathbb{Z}\}$. On sait, d'après le cours, que tout revêtement connexe de X est isomorphe à un quotient de $\tilde{X}$ par un sous-groupe H de $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}$ est abélien, tous ces revêtements sont galoisiens et de plus, deux sous-groupes différents donnent des revêtements non-isomorphes. Les sous-groupes possibles sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, on retrouve le revêtement universel, si $n = 1$, on retrouve $X = S^1 \vee S^2$. Enfin si $n > 1$, On doit quotienter $\tilde{X}$ par la translation τ_n. On vérifie alors que l'espace obtenu est homéomorphe à S^1 auquel on a rajouté n-sphères S^2 collées en les points $\exp(2ik\pi/n)$, c'est à dire un collier de n-sphères.

Exercice 4. (du tore à la sphère) On munit $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ du point base 1 et on note $S^1 \vee S^1$ la réunion connexe de 2 copies de S^1.

1. Montrer que le quotient topologique $S^1 \times S^1/(S^1 \vee S^1)$ est homéomorphe à S^2. On notera p l'application induite $p : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1/(S^1 \vee S^1) \cong S^2$.
2. Montrer que l'application p n'est pas homotope à une application constante.
3. Montrer que toute application continue $S^2 \to S^1 \times S^1$ est homotope à une application constante.

Solution 4. 1. $S^1 \times S^1$ est le quotient d'un carré dont on a identifié les bords opposés. Cela lui confère une structure de CW-complexe avec un unique sommet, une cellule de dimension 2 et deux cellules de dimension 1 notée a, b qui sont des cercles. En particulier la réunion en un point $S^1 \vee S^1 = a \vee b = (S^1 \times S^1)^{(1)}$ est le 1-squelette du Tore. En quotientant le Tore par $S^1 \vee S^1$, on effectue donc le recollement d'une 2-cellule sur un point (en identifiant son bord avec le point), ce qui est une décomposition en CW-complexe de la sphère. Il suit que $S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1/(S^1 \vee S^1) \cong S^2$. De plus l'application $p : S^1 \times S^1 \to S^2$ est cellulaire par construction (*i.e.* envoie le k-squelette du tore sur le k-squelette de la sphère).

2. Si f est homotope à une application constante, alors $f_* : H_i(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) \to H_i(S^2, \mathbb{Z})$ est nulle pour tout $i \geq 1$. Comme p est cellulaire, il induit un morphisme $p : CW_*(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) \to CW_*(S^2, \mathbb{Z})$ de complexes de chaines cellulaires , c'est à dire un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d, "id"] \\ \cdots 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \tag{0.2}$$

Notons que les flèches horizontales de la première ligne sont nulles comme on l'a déjà démontré dans l'Exercice 1. La flèche verticale de gauche est la composition

$$p : \mathbb{Z} \cong CW_2(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) = H_2(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1, \mathbb{Z}) \overset{p_*}{\to} H_2(S^2, *, \mathbb{Z}) = CW_2(S^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Or, d'après le cours, $H_2(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1, \mathbb{Z}) \overset{p_*}{\to} H_2(S^2, *, \mathbb{Z})$ se factorise sous la forme

$$H_2(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1, \mathbb{Z}) \cong H_2(S^1 \times S^1/(S^1 \vee S^1), *, \mathbb{Z}) \overset{p_*}{\to} H_2(S^2, *, \mathbb{Z})$$

et d'après la question précédente, il suit que p_* est un isomorphisme. On déduit alors du diagramme (0.2) ci-dessus que $p_* : \mathbb{Z} = H_2(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) = CW_2(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) \to CW_2(S^2, \mathbb{Z}) = H_2(S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est un isomorphisme et est non-nulle. Ceci prouve que p est non-homotope à une constante.

Remarque: il ne faut pas croire ici que le fait que p soit surjective implique que p n'est pas homotope à une constante (comme on l'a vu écrit dans certaines copies). Il est très facile de trouver des contre-exemples.

3. Soit $f : S^2 \to S^1 \times S^1$ une application continue. Comme S^2 est simplement connexe, d'après le théorème de relèvement des applications, f se relève en une application $\tilde{f} \to \mathbb{R}^2$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$ où $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ est le revêtement universel de $S^1 \times S^1$. Mais $\mathbb{R}^2$ est contractile, donc $\tilde{f}$ est homotope à une application constante et il suit que f aussi.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ et S^n la sphère de dimension n.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe une application $f : S^n \to S^n$ de degré k (indication: on pourra considérer des bouquets de sphères).

2. Soit $f : S^n \to S^n$ de degré $k > 1$. On note X le CW-complexe obtenu en recollant une cellule de dimension $n+1$ sur S^n via l'application f et Y l'espace quotient $X/X^{(n)}$.

   (a) Soit $p : X \to Y = X/X^{(n)}$ l'application quotient. Montrer que les applications induites $p_* : H_i(X, \mathbb{Z}) \to H_i(Y, \mathbb{Z})$ sont nulles pour tout $i \geq 1$.

   (b) Montrer que p n'est cependant pas homotope à une application constante.

Solution 5. 1. Une application constante est de degré 0, l'identité de degré 1. On a vu en cours que la restriction d'une réflexion (dans $\mathbb{R}^{n+1}$) sur la sphère est de degré -1 (rappelons que l'on peut obenir ce résultat en raisonant par récurence et en utilisant Mayer Vietoris, ou une décomposition cellulaire de la sphère en deux cellules de dimensions n recollées sur S^{-1}). Comme $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$, il suffit désormais de montrer qu'il existe des applications de degré k pour tout entier $k > 1$. Soit $c : S^n \to S^n \vee S^n$ l'application obtenue en quotientant l'équateur S^{n-1} de S^n en un point (faire un dessin...). En itérant cette construction (par exemple sur la deuxième sphère du bouquet) on obtient une application continue $c_k : S^n \to \bigvee_{i=1}^k S^n$ (on peut aussi directement quotienter S^n en envoyant l'intersection de S^n avec k hyperplans non-colinéaires sur un seul point). On a une application canonique $q_k = \bigvee id : \bigvee_{i=1}^k S^n \to S^n$ (qui est l'identité sur chaque sphère du bouquet). Soit $f = q_k \circ c_k : S^n \to S^n$

Montrons que f est de degré k. L'application induite $f_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \to H_n(S^n, \mathbb{Z})$ en homologie est la composée $q_{k*} \circ c_{k*}$. En prenant la structure de CW-complexe de S^n avec une seule cellule de dimension n et une cellule de dimension 0, on obtient une structure de CW-complexes sur $\bigvee S^n$ avec k cellules de dimension n et une seulle cellule de dimension 0. On a alors que le complexe cellulaire de $\bigvee S^n$ a toutes ses différentielles ∂_i nulles et, comme $CW_n(\bigvee_{i=1}^k S^n, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}$, on a $H_n(\bigvee_{i=1}^k S^n, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}$. De plus $q_k : \mathbb{Z}^k = CW_n(\bigvee_{i=1}^k S^n, \mathbb{Z}) \to CW_n(S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est l'application $(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 + \cdots + x_k$ (puisque p_k restreinte à une cellule de dimension n est l'identité).

Soit $\phi_j : \bigvee_{i=1}^k S^n \to S^n$ l'application qui est l'identité sur la $j^{\text{ième}}$-sphère du bouquet et projette les autres sphères sur le point base. Autrement dit ϕ_j est la projection sur la $j^{\text{ième}}$-sphère du bouquet $\bigvee S^n$. Par construction l'application, $\phi_j \circ c_k$ est homotope à l'identité, donc est un isomorphisme en homologie. On en déduit que l'application $H_n(S^n, *) \overset{c_k}{\to} H_n(\bigvee S^n, *) \cong \bigoplus_{i=1}^k H_n(S^n, pt) \overset{pr_j}{\to} H_n(S^n, *)$ (où pr_j est la projection sur le $j^{\text{ième}}$-facteur de la somme directe) est l'identité. Il suit que $c_{k*} : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \to H_n(\bigvee_{i=1}^k S^n, \mathbb{Z})$ est l'application diagonale $x \mapsto (x, \cdots, x)$.

Par conséquent $f_*(x) = p_{k*} \circ c_{k*}(x) = x + \cdots + x$ et donc f est bien de degré k.

2. On a désormais fixé f de degré $k > 1$.

   (a) Par définition, f est cellulaire et donc une application $f : CW_i(X, A) \to CW_i(Y, A)$ qui commute avec les différentielles pour tout groupe abélien A et entier i. Le CW-complexe X a 3 cellules (située en dimension 0, n et $n+1$) et Y a 2-cellules (un sommet et une en dimension $n+1$). Puisque f est de degré k, d'après le cours, la différentielle $A = CW_{n+1}(X, A) \overset{\partial_{n+1}}{\to} CW_n(X, A) \cong A$ est la multiplication par k. Explicitant les complexes cellulaires de X et Y, on obtient alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"] & A \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{0.3}$$

   Notons que la première flèche verticale $p : A \to A$ est l'identité (c'est le même raisonement que dans l'exercice 4, question (2)). Pour $A = \mathbb{Z}$, la multiplication par k est injective. Il suit que $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ si $i \neq 0, n$ (et $H_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$) En revanche, $H_i(Y, Z) = 0$ si $i \neq 0, n+1$ (et $H_{n+1}(Y, \mathbb{Z}) = H_0(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$). Par conséquent $p_* : H_{i \geq 1}(X, Z) \to H_{i \geq 1}(Y, \mathbb{Z})$ est nulle (puisque les groupes en question ne sont pas simultanément non-nuls).

   (b) On va montrer qu'il existe $i > 0$ et un groupe abélien A tel que $p_* : H_i(X, A) \to H_i(Y, A)$ soit non-nulle, ce qui par invariance homotopique de l'homologie démontrera que p n'est pas homotope à une application constante. Il suffit de prendre $A = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Dans ce cas la multiplication par k est nulle dans A, et on déduit du diagramme (0.3) de la question précédente que $H_i(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ si $i = 0, n, n+1$ et $H_i(Y, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ si $i = 0, n+1$. De plus l'application $p_* : CW_{n+1}(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \to CW_{n+1}(Y, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ est l'identité. Or comme les différentielles sont nulles, ces derniers groupes sont aussi les groupes d'homologie en degré $n+1$ de X et Y (à coefficient dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$). Il suit que $p_* : H_{n+1}(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \to H_{n+1}(Y, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ est un isomorphisme non-nul.