Partiel de Topologie Algébrique Élémentaire
6 décembre 2010 - durée: 2 heures 15.

Exercice 1. (degré et points fixes) Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que toute application continue de S^1 dans S^1 qui n'a pas de point fixe est homotope à l'identité .
2. En déduire que toute application de degré différent de 1 a un point fixe.

Exercice 2. (contractibilité de la sphère de dimension infinie) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne et de l'inclusion $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. On note $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{R}^n$ (muni de la topologie de l'union). Soit $S^\infty = \bigcup S^n \subset \mathbb{R}^\infty$.

1. Montrer que S^∞ s'identifie à la sphère unité de $\mathbb{R}^\infty$.
2. Montrer que S^∞ est contractile. (Indication: considérer l'application $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ définie par $T(x_1, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, \dots, x_n, \dots)$.)

Exercice 3. (Revêtements de $U(n)$) Soit $U(n)$ le groupe des matrices hermitiennes de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$. On note $\det : U(n) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ l'application déterminant et $SU(n)$ son noyau. On note $N = (0, \dots, 0, 1)$ le pôle nord de $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$.

1. Montrer que l'application $\psi : SU(n) \times S^1 \to U(n)$ définie par $\psi(M, z) = z \cdot M$ est un revêtement galoisien.
2. On suppose $n \geq 2$. Soit $e_N : SU(n) \to S^{2n-1}$ l'application d'évaluation au pôle nord définie par $e_N(A) = A \cdot N$. Montrer qu'il existe une section continue $s : (S^{2n-1} - N) \to SU(n)$ de e_N, c'est à dire une application continue $s : (S^{2n-1} - N) \to SU(n)$ telle que $e_N \circ s = \mathrm{Id}$.
3. Montrer que $SU(n)$ est simplement connexe. (Indication: on pourra raisonner par récurrence et utiliser la question précédente et Van-Kampen.)
4. En déduire le groupe fondamental $\pi_1(U(n), \mathrm{id})$ de $U(n)$ et l'image de l'application induite $\det_* : \pi_1(U(n), \mathrm{id}) \to \pi_1(S^1, 1)$ par le déterminant. Déterminer tous les revêtements de $U(n)$ à isomorphisme près.

Exercice 4. (Revêtements de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$)

1. Déterminer le groupe fondamental de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ et un revêtement universel de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$.
2. Déterminer, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$.

Exercice 5. ((dés)enlacement d'une droite) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Soit C_1; C_2 deux cercles (inclus dans des hyperplans et de rayons non-nuls) et D_1, D_2 les disques bordés par C_1 et C_2. Soit L_1 une droite coupant $D_1 \setminus C_1$ en un unique point et L_2 une droite disjointe de D_2.

Existe-t-il un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans lui même qui envoie (simultanément) C_1 sur C_2 et L_1 sur L_2 ? (bien sur, il faudra justifier la réponse...)