Corrigé succint du Partiel de Topologie Algébrique Élémentaire (du 6 décembre 2010) - durée: 2 heures 15.

Exercice 1. (degré et points fixes) Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que toute application continue de S^1 dans S^1 qui n'a pas de point fixe est homotope à l'identité .
2. En déduire que toute application de degré différent de 1 a un point fixe.

Solution 1. 1. Par hypothèse, l'application $g : S^1 \to S^1$ définie par $g(z) = f(z)/z$ est à valeur dans $S^1 - \{1\}$. Or $S^1 - \{1\}$ est homéomorphe à l'intervalle, donc est contractile. Il en découle que g est homotope à l'application constante $z \mapsto -z = \exp(i\pi)z$ (c'est à dire une rotation d'angle π). Il est clair qu'une telle rotation est homotope à l'identité (regarder $h(t, z) = \exp(it\pi)z$).

Remarque 1. On peut répondre à cette question en utilisant un théorème de relèvement des angles. En revanche, il faut faire attention à ce qu'on relève: on ne peut pas relever $f : S^1 \to S^1$ directement mais on peut relever l'application $\mathbb{R} \to S^1 \xrightarrow{f} S^1$ obtenue en composant f par le revêtement universel de S^1. Ceci fait, on peut remarquer que l'hypothèse assure que les valeurs du relèvement restent compris entre un intervalle de diamètre plus petit que 2π et conclure sur le degré de f.

2. Par invariance homotopique du degré, toute application n'ayant pas de point fixes est homotope à l'identité et le résultat suit.

Remarque 2. Cette question avait surtout pour but d'énoncer clairement le résultat obtenu (et de vérifier une question de base du cours) !

Exercice 2. (contractibilité de la sphère de dimension infinie) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne et de l'inclusion $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. On note $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{R}^n$ (muni de la topologie de l'union). Soit $S^\infty = \bigcup S^n \subset \mathbb{R}^\infty$.

1. Montrer que S^∞ s'identifie à la sphère unité de $\mathbb{R}^\infty$.
2. Montrer que S^∞ est contractile. (Indication: considérer l'application $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ définie par $T(x_1, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, \dots, x_n, \dots)$.)

Solution 2. 1. On munit $\mathbb{R}^\infty$ du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ (on remarque que la somme est toujours finie et que ceci définit bien un produit scalaire). On notera $||x||$ la norme associée. Comme tout élément de $\mathbb{R}^\infty$ a un nombre fini de coordonnées non nulles, il suit que S^∞ s'identifie à la sphère unité de $\mathbb{R}^\infty$ pour ce produit scalaire.

2. L'application T est continue (elle est linéaire et de norme d'opérateur 1) et envoie S^∞ dans lui même. De plus, pour tout $x, T(x) \neq -x$ (en effet soit x_i la première coordonnée non-nulle de x, alors $T(x)_i = 0 \neq x_i$). Il suit que l'application

$$H(t, x) = \frac{tT(x) + (1-t)x}{||tT(x) + (1-t)x||}$$

définit une application continue de $H : I \times S^\infty \to S^\infty$. La seule chose à vérifier est que $tT(x) + (1-t)x$ ne s'annule pas. Ceci ne serait possible (pour des raisons de norme) que si $t = 1-t$ ce qui donnerait $T(x) = x$, cas que l'on a déjà exclu.

On a $H(0,x) = x$ et $H(1,x) = T(x)$ (pour $x \in S^\infty$) et donc T est homotope à l'identité de S^∞. Il suffit maintenant de montrer que T est homotope à une application constante pour conclure. Pour cela on remarque que $T(S^\infty)$ est léquateur de S^∞. En particulier, en notant N le point $(1,0,0,\dots) \in S^\infty$, le point $tN + (1-t)T(x)$ n'est jamais nul quel que soit $x \in S^\infty$ et $t \in \mathbb{R}$. Il suit que l'application $G : I \times S^\infty \to S^\infty$ définie par

$$G(t,x) = \frac{tN + (1-t)T(x)}{||tN + (1-t)T(x)||}$$

est une homotopie entre T et l'application constante $x \mapsto N$.

Exercice 3. **(Revêtements de $U(n)$)** Soit $U(n)$ le groupe des matrices unitaires de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$. On note $\det : U(n) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ l'application déterminant et $SU(n)$ son noyau. On note $N = (0,\dots,0,1)$ le pôle nord de $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$.

1. Montrer que l'application $\psi : SU(n) \times S^1 \to U(n)$ définie par $\psi(M,z) = z \cdot M$ est un revêtement galoisien.

2. On suppose $n \geq 2$. Soit $e_N : SU(n) \to S^{2n-1}$ l'application d'évaluation au pôle nord définie par $e_N(A) = A \cdot N$. Montrer qu'il existe une section continue $s : (S^{2n-1} - N) \to SU(n)$ de e_N, c'est à dire une application continue $s : (S^{2n-1} - N) \to SU(n)$ telle que $e_N \circ s = \mathrm{Id}$.

3. Montrer que $SU(n)$ est simplement connexe. (Indication: on pourra raisonner par récurrence et utiliser la question précédente et Van-Kampen.)

4. En déduire le groupe fondamental $\pi_1(U(n), \mathrm{id})$ de $U(n)$ et l'image de l'application induite $\det_* : \pi_1(U(n), \mathrm{id}) \to \pi_1(S^1, 1)$ par le déterminant. Déterminer tous les revêtements de $U(n)$ à isomorphisme près.

Solution 3.

1. Comme $\overline{z}z = 1$, l'application ψ est bien définie. De plus, $\det(\psi(z,M)) = z^n$. Soit $N \in U(n)$ et z_0 une racine $n^{\text{ième}}$ de $\det(N)$. Alors $N = \psi((1/z_0) \cdot N, z_0)$. Donc ψ est surjective et par ailleurs, $(N', z_1) \in \psi^{-1}(N)$ ssi $N' = (1/z_1) \cdot N$ et $z_1^n = z_0^n = \det(M)$. Il suit que la fibre $\psi^{-1}(N)$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité. L'application ψ est propre ($SU(n)$ et S^1 sont compacts et $U(n)$ séparé), il suit que ψ est un revêtement. Pour montrer qu'il est galoisien, il suffit de remarquer que pour tout $0 \leq \ell \leq n-1$, l'application $U(n) \times S^1 \to U(n) \times S^1$ définie par $(M,z) \mapsto \Big((\exp(2i\ell\pi/n) \cdot M, \exp(-2i\ell\pi/n)z\Big)$ est un automorphisme de revêtement. En faisant varier ℓ, on obtient n-valeurs différentes dans la fibre au dessus d'un point M, d'où le résultat (par connexité).

2. Soit $z \in S^{2n-1} - N$. On note $H(z)$ l'orthogonal du plan engendré par z et N. On note $s(z)$ l'unique élément de $SU(n)$ qui envoie N sur z et est l'identité sur $H(z)$. Comme $H(z)$ varie continuement en fonction de z, $s : S^{2n-1} \to SU(n)$ est continue. Par construction, c'est bien une section de e_N.

3. On identifie $SU(n-1)$ avec le sous-groupe spécial unitaire de l'orthogonal du pôle nord N. On définit alors $\phi_N : S^{2n-1} - N \times SU(n-1) \to SU(n)$ par $\phi_N(z,A) = s(z) \cdot A$. Soit S le pôle sud; comme dans la question précédente on obtient une section $\tilde{s} : S^{2n-1} - S \to SU(n)$ de l'évaluation $e_S : A \mapsto A \cdot S$ au pôle sud et une application $\phi_S(z,A) = \tilde{s}(z) \cdot A$. Notons que ϕ_N (et de même ϕ_S) est injective (puisque un éleément de $SU(n)$ est déterminé sur une base orthogonale). Par contruction, $SU(n)$ est recouvert par la réunion des ouverts $\phi_N((S^{2n-1} - N) \times SU(n-1))$ et $\phi_S((S^{2n-1} - S) \times SU(n-1))$. De plus leur intersection est homéomorphe à $S^{2n-1} - \{N,S\} \times SU(n-1)$. Rappelons que $S^{2n-1} - N \cong \mathbb{R}^{2n-1}$.

On raisonne maintenant par récurrence. Le groupe $SU(1)$ est le groupe trivial $\{1\}$, donc est simplement connexe. Si on suppose $SU(n-1)$ simplement connexe[1] et $n \geq 2$, alors, on a vu que $SU(n)$ est recouvert par deux ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^{2n-1} \times SU(n-1)$ dont l'intersection est connexe (rappel: on suppose $n \geq 2$). Par le théorème de Van Kampen (par exemple), il suit que $SU(n)$ est simplement connexe.

4. Soit $x \mapsto p(x) = \exp(2i\pi x)$ le revêtement universel $\mathbb{R} \to S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de S^1. Comme $SU(n)$ est simplement connexe, il en va de même de $SU(n)\times\mathbb{R}$. De plus, l'application $q = \psi \circ (\mathrm{Id} \times p) : SU(n) \times \mathbb{R} \to U(n)$ est un revêtement d'espace total simplement connexe. C'est donc le revêtement universel de $U(n)$. Clairement $q(A, x) = \exp(2ix\pi) \cdot A$. Il suit (comme dans la question 1) que la fibre $q^{-1}(\mathrm{Id}_{U(n)}$ au dessus de l'identité est isomorphe à l'ensemble $\{id\} \times \frac{1}{n}\mathbb{Z} \subset SU(n) \times \mathbb{R}$, l'isomorphisme étant donné par $(\mathrm{Id}, k/n) \mapsto (\exp(2ik\pi/n)\,\mathrm{Id}, k)$. On a de plus un morphisme de groupe $\mathbb{Z} \to Aut(q)$ donné par $k \mapsto \theta_k$ où $\theta_k(A, x) = (\exp(2ik\pi/n)\cdot A, x+k)$. C'est un morphisme injectif par définition et surjectif d'après la remarque précédente sur les fibres. Par conséquent, le groupe des automorphismes du revêtement universel (c'est à dire le groupe fondamental puisque $U(n)$ est localement contractile) est isomorphe à $\mathbb{Z}$!

   Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $k\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}$ est abélien, chacun de ces sous-groupes donne une classe d'isomorphisme de revêtements distincte de celle donnée par les autres sous-groupes. Explicitement,les classes d'isomorphismes de revêtements connexes de $U(n)$ sont donnés par les quotients de $SU(n) \times \mathbb{R}$ par $(A, x) \sim (\exp(2i\frac{k}{n}\pi)A, x + k/n)$ (où $k \in \mathbb{N}$).

   Par exemple, si $k = \ell n$, alors on obtient le revêtement $SU(n) \times S^1 \to U(n)$ donné par $(A, z) \mapsto z^\ell \cdot A$.

   Finalement, on a une section $e : S^1 \to U(n)$ de $\det : U(n) \to S^1$ donnée par $e(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{U(n-1)} \end{bmatrix}$. On en déduit que $\det_* \circ e_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ est l'identité et donc $\det_* : \pi_1(U(n), 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ est surjective.

Exercice 4. (Revêtements de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$)

1. Déterminer le groupe fondamental de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ et un revêtement universel de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$.
2. Déterminer, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$.

Solution 4. 1. On utilise le théorème de Van Kampen en découpant $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ sous la forme d'un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}P^2 \vee U$ (où U est un voisinage contractile du point base dans $\mathbb{R}P^2$) et d'un voisinage $U \vee \mathbb{R}P^2$. Le voisinage $U \vee U$ est alors contractile. Rappelons que $\mathbb{R}P^2$ est le quotient $S^2/\{\pm \mathrm{Id}\}$, donc est de groupe fondamental $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ car S^2 est simplement connexe. On choisit $[N] = [S]$ la classe du pôle nord comme point base de $\mathbb{R}P^2$.

On obtient alors $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2, [N]) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le produit libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec lui-même. On note a, b les générateurs respectifs de chaque $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est clair que ce groupe est infini (ses éléments sont de la forme $a^\epsilon(ab)^n b^\delta$ où ϵ, δ valent 0 ou -1. Il est clair que le revêtement universel $p : E \to \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ doit donc avoir un nombre dénombrable de feuillets. De plus, sa restriction à une composante connexe de $\mathbb{R}P^2 \vee \{[N]\}$ doit être un revêtement simplement connexe, donc S^2. Ceci suggère la construction suivante

Soit E la réunion de sphères de diamètre 1, centrées (dans $\mathbb{R}^3$) en $(0, 0, 1/2 + \mathbb{Z})$. En particulier, ces sphères sont reliées à une autre sphère en son pôle nord et son pôle sud (données par des points de coordonnées). On note $p : E \to \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ l'application définie sur les sphères S^2_{2k} de centre $(0, 0, 1/2 + 2k)$ par la composition

$$S^2_{2k} \to S^2_{2k} - (0, 0, 1/2 + 2k) = S^2 \to S^2/\{\pm \mathrm{Id}\} = \mathbb{R}P^2 \vee \{1\} \hookrightarrow \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$$

[1] on ets dans un cas où l'on a pas besoin de distinguer entre simplement connexe et simplement connexe par arcs

et, sur les sphères S^2_{2k+1} de centre $(0,0,1/2+2k+1)$ par la composition

$$S^2_{2k+1} \to S^2_{2k+1} - (0,0,1/2+2k+1) = S^2 \to S^2/\{\pm \mathrm{Id}\} = \{1\} \vee \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2.$$

En somme, p est essentiellement l'application qui quotiente alternativement chaque sphère sur chaque $\mathbb{R}P^2$ de la réunion. Comme les pôles nord et sud de chaque sphère sont envoyés sur le point base de $\mathbb{R}P^2$, on vérifie sans difficultés que $p : E \to \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ définit bien un revêtement de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$. Il est simplement connexe par le théorème de Van Kampen (pour la réunion des sphères) car S^2 est simplement connexe. Ceci prouve que c'est le revêtement universel. On remarquera que le point base est donne par l'image de $(0,0,0)$ par p.

2. Il y a plusieurs cas à considérer. On commence par remarquer que $ab \in \pi_1(\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2, [N])$ agit sur le revêtement universel par une translation de vecteur $(0,0,2)$. Les autres éléments de $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2, [N])$ agissent comme des symétries glissées sur E. Si un sous-groupe de $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2, [N])$ ne contient pas de symétrie (il est alors de la forme $\langle (ab)^n \rangle$), alors, le quotient de E par ce sous-groupe est un "collier" de $2n$-sphères recollées en leurs pôles.

   Si le groupe contient une symétrie mais pas de translation, on obtient une "demi-droite" de sphères recollées entre elles le long de leurs poles nord et sud et la première sphère est quotientée par son application antipodale (c'est a dire une copie de $\mathbb{R}P^2$). Enfin si on contient une translation (et notons encore $(ab)^n$ un generateur du sous-groupe de translations) et une symétrie, on obtient un segment de $n-1$-sphères dont les extrémités sont quotientées par leur application antipodale (c'est a dire des copies de $\mathbb{R}P^2$)

Exercice 5. ((dés)enlacement d'une droite) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Soit C_1; C_2 deux cercles (inclus dans des hyperplans et de rayons non-nuls) et D_1, D_2 les disques bordés par C_1 et C_2. Soit L_1 une droite coupant $D_1 \setminus C_1$ en un unique point et L_2 une droite disjointe de D_2.

Existe-t-il un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans lui même qui envoie (simultanément) C_1 sur C_2 et L_1 sur L_2 ? (bien sur, il faudra justifier la réponse...)

Solution 5. Si il existe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ homéomorphisme qui envoie C_1 sur C_2 et L_1 sur L_2, alors la restriction de ϕ à $\mathbb{R}^3 - L_1$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3 - L_1$ sur $\mathbb{R}^3 - L_2$. Le cercle C_1 définit un lacet dans $\mathbb{R}^3 - L_1$ (après avoir choisi une paramétrisation). Le lacet C_1 n'est *pas* homotope à un lacet constant (il est de degré non nul dans son plan privé du point d'intersection du plan avec L_1). En revanche le lacet C_2 est homotope à un lacet constant dans $\mathbb{R}^3 - L_2$. Ceci contredit le fait que $\phi^{-1}(C_2) = C_1$ (car $\phi_*^{-1}(C_2)$ est nécessairement homotope à un lacet constant dans $\mathbb{R}^3 - L_1$).