FIMFA 2$^{\text{e}}$ année
Topologie algébrique — examen — 21 janvier 2008
Corrigé

1. Pour chacun des espaces X suivants, définir une structure de CW complexe sur X, et déterminer l'homologie de X (à coefficient dans $\mathbb{Z}$).

(a) $X = \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$

En général, si $X = Y \times Z$ où Y et Z sont deux CW complexes finis (c'est-à-dire avec un nombre fini de cellules), on peut donner à X une structure de CW complexe avec une cellule en dimension $n+m$ pour tout couple d'une cellule de dimension n dans Y et une de dimension m dans Z. Plus précisément, soient

$$\rho_j : D^n \longrightarrow Y^{(n)} \qquad \text{et} \qquad \sigma_k : D^m \longrightarrow Z^{(m)}$$

les applications caractéristiques de deux cellules données, on définit une cellule dans $Y \times Z$ avec l'application caractéristique

$$\tau_{j,k} : D^{n+m} \xrightarrow{\alpha_{nm}} D^n \times D^m \xrightarrow{\rho_j \times \sigma_k} Y \times Z = X,$$

où α_{nm} est n'importe quel homéomorphisme. Par exemple, on peut prendre

$$\alpha_{nm}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1 + (\|y\|/\|x\|)^2} \cdot (x,y) & \text{si } \|y\| \leq \|x\| \neq 0 \\ \sqrt{1 + (\|x\|/\|y\|)^2} \cdot (x,y) & \text{si } \|x\| \leq \|y\| \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tel que $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq 1$. Soit $X^{(p)}$ la réunion des cellules fermées de dimension $\leq k$; on a donc

$$X^{(p)} = \bigcup_{n+m=p} Y^{(n)} \times Z^{(m)}.$$

Par cette définition, il est clair que chaque élément $(y,z) \in Y \times Z$ est contenu dans exactement une cellule ouverte (le produit des cellules ouvertes qui contiennent y et z). Il reste donc à montrer, pour tout $U \subseteq X$, que U est ouvert (fermé) si l'image reciproque de U par chaque application caractéristique est ouverte (fermée). Puisque le nombre de cellules est fini, si toutes les images reciproques sont fermées, alors U est une réunion finie de compacts (les images de ces images reciproques), donc compact, donc fermé.

Pour passer aux exemples concrets. On a vu en cours que $\mathbb{C}P^2$ a une structure cellulaire avec une cellule en chaque dimension 0, 2, et 4. On donne donc à $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$ une structure cellulaire avec 9 cellules, en dimension $i+j$ pour $i,j = 0,2,4$. Puisque toutes les cellules sont en dimension paire, le complexe cellulaire $(C(X), \partial)$ est zéro en degré impaire, et toutes les applications de bord disparaissent. Par conséquent, pour tout q, $H_q(X) \cong \mathbb{Z}^{n(q)}$ où $n(q)$ est le nombre de q-cellules: $n(0) = n(8) = 1$, $n(2) = n(6) = 2$, $n(4) = 3$, et $n(q) = 0$ pour tout $q \neq 0,2,4,6,8$.

(b) $X = S^2 \times S^3$

On a vu en cours qu'on peut donner à S^n une structure cellulaire avec deux cellules, en dimension 0 et n. On donne donc à X une structure cellulaire avec 4 cellules, en dimensions $0,2,3,5$.

Le complexe cellulaire $(C(X), \partial)$ est de la forme

$$0 \longrightarrow \underset{5}{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{3}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_3} \underset{2}{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{0}{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0,$$

où le degré de chaque groupe est montré en dessous. Le calcul de l'homologie de X dépend donc de l'homomorphisme ∂_3. Considérons les deux applications

$$S^2 \xrightarrow{\ f\ } S^2 \times S^3 \xrightarrow{\ g\ } S^2,$$

où $f(x) = (x,(1,0,0,0))$ et $g(x,y) = x$. Puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_{S^2}$, $g_\# \circ f_\#$ est l'identité sur $H_2(S^2)$, ce qui entraîne que $f_\#$ est injectif, et que $H_2(S^2 \times S^3) \cong \mathbb{Z}/\operatorname{Im}(\partial_3)$ est infini. Ceci est possible seulement si $\partial_3 = 0$. Par conséquent, $H_q(X) \cong \mathbb{Z}$ pour $q = 0,2,3,5$, et $H_q(X) = 0$ pour $q = 1,4$ et $q > 5$.

2. Soit X un espace topologique.

(a) A l'aide du lemme du serpent, construire une suite exacte où chaque groupe est de la forme $H_q(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ou $H_q(X;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ pour $q \geq 0$ (et tous ces groupes paraissent au moins une fois), et qui contient des homomorphismes de la forme

$$\beta_q(X) : H_q(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{q-1}(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

(Le point de départ est une suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$.)

La suite

$$0 \longrightarrow S_q(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\ f\ } S_q(X;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \xrightarrow{\ g\ } S_q(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout q, où $f(\sum \overline{n_i}\phi_i) = \sum \overline{2n_i}\phi_i$ et g réduit les coefficients modulo 2. Par le lemme du serpent, on a une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_q(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{f_\#} H_q(X;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \xrightarrow{g_\#} H_q(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta_q(X)}$$
$$H_{q-1}(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{f_\#} H_{q-1}(X;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \xrightarrow{g_\#} H_{q-1}(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots .$$

(b) Montrer que $\beta_1(X) = 0$ pour tout X connexe par arcs.

Puisque X est connexe par arcs, $H_0(X;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout n. On a donc une suite exacte

$$H_1(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta_1(X)} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f_\#} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{g_\#} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Il s'ensuit que $f_\#$ est injective, donc $\mathrm{Im}(\beta_1(X)) = 0$, et $\beta_1(X) = 0$.

On peut le montrer par calcul direct aussi. Soient $n_i \in \mathbb{Z}$ et $\phi_i : \Delta^1 \longrightarrow X$ tels que $\partial(\sum \overline{n_i}\phi_i) = 0$ dans $S_0(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. On peut donc écrire $\partial(\sum n_i\phi_i) = \sum m_j x_j$, où $m_j \in 2\mathbb{Z}$, $x_j \in X$, et $\sum m_j = 0$. Par la définition de l'application de bord, $\beta_1(X)([\sum \overline{n_i}\phi_i]) = [\sum \overline{(m_j/2)}x_j]$. Puisque X est connexe par arcs et la somme des coefficients égale zéro, cet élément représente $0 \in H_0(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

(c) Montrer que $\beta_2(\mathbb{R}P^2) \neq 0$.

Pour tout n et q, $H_q(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est l'homologie du complexe cellulaire

$$0 \longrightarrow \underbrace{C_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underbrace{C_1(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \xrightarrow{\ 0\ } \underbrace{C_0(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \longrightarrow 0.$$

Ceci entraîne que $H_q(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $q = 1, 2$ et $n = 2, 4$. La suite exacte du (a) prend la forme

$$\cdots \xrightarrow{\beta_2(\mathbb{R}P^2)} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow[=0]{\beta_1(\mathbb{R}P^2)} \cdots$$

et $\beta_2(\mathbb{R}P^2)$ est forcément différent de zéro.

3. Pour tout espace topologique X et toute application continue $f : X \longrightarrow X$, on définit le *télescope* de X et f par

$$\text{Tél}(X, f) = \big(X \times I \times \mathbb{N}\big)/\!\sim$$

où $(x, 1, n) \sim (f(x), 0, n+1)$ pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$. ($\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq 0\}$.) Soit $p : \text{Tél}(X, f) \longrightarrow [0, +\infty[$ l'application $p(x, t, n) = t + n$.

(a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $p^{-1}([0, n])$ a le type d'homotopie de X.

Ecrivons $T = \text{Tél}(X, f)$ et $T_n = p^{-1}([0, n])$ pour tout n.

Pour $t \in \mathbb{R}$, soient $[t] \in \mathbb{Z}$ sa partie entière et $\varphi(t) = t - [t] \in [0, 1[$.

Soient

$$i_n : X \longrightarrow T_n, \qquad r_n : T_n \longrightarrow X, \qquad \text{et} \qquad H : T_n \times I \longrightarrow T_n$$

les applications $i_n(x) = [x, 0, n]$, $r_n([x, t, m]) = f^{n-m}(x)$, et

$$H([x, t, m], s) = \big[f^{[(1-s)(m+t)+sn]-m}(x), \varphi((1-s)(m+t) + sn), [(1-s)(m+t) + sn]\big].$$

On contrôle facilement que ces applications sont bien définies et continues. Alors $r_n \circ i_n = \text{Id}_X$, $H(-, 1) = i_n \circ r_n$, et $H(-, 0) = \text{Id}_{T_n}$, donc $X \simeq T_n$.

(Une autre possibilité est de le montrer par étapes, en montrant que $p^{-1}([k, n]) \simeq p^{-1}([k+1, n])$ pour tout $0 \leq k < n$.)

(b) Soit $X = S^n$ ($n \geq 2$), et $f : S^n \longrightarrow S^n$ une application de degré 2. Déterminer $H_n(\text{Tél}(S^n, f))$. (Indication: construire un homomorphisme de $H_n(\text{Tél}(S^n, f))$ vers le groupe $\mathbb{Q}$, montrer qu'il est injectif, et déterminer son image.)

Soit $\psi : H_n(S^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ un isomorphisme.

Soit $z = \sum_{i=1}^{k} n_i \phi_i \in Z_n(T)$ un cycle, de support $K = \bigcup_{n=1}^{k} \phi_i(\Delta^n)$. Alors K est compact, donc $p(K) \subseteq [0, m]$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$, et $K \subseteq T_m$. Définissons

$$\widehat{\chi}(z) = \frac{1}{2^m} \cdot \psi([(r_m)_\#(z)]).$$

Si $\ell > m$, alors $\psi([(r_\ell)_\#(z)]) = 2^{\ell-m}\psi([(r_m)_\#(z)])$ puisque f est de degré 2, et donc

$$\frac{1}{2^\ell} \cdot \psi([(r_\ell)_\#(z)]) = \frac{1}{2^m} \cdot \psi([(r_m)_\#(z)]).$$

Il s'ensuit que $\widehat{\chi}(z)$ est indépendant du choix de m. Si $[z] = [z']$ dans $H_n(T)$, alors $z - z' = \partial d$ pour $d \in S_{n+1}(T)$, le support de d est contenu dans T_M pour M assez grand, $[z] = [z'] \in H_n(T_M)$, et $\widehat{\chi}(z) = \widehat{\chi}(z')$. On a donc une application $\chi : H_n(T) \longrightarrow \mathbb{Q}$ où $\chi([z]) = \widehat{\chi}(z)$ pour tout $z \in Z_n(T)$. On voit facilement que χ est un homomorphisme.

Si $\chi([z]) = 0$, alors $\psi([(r_m)_\#(z)]) = 0$ pour m assez grand, donc $[z] = 0$ dans $H_n(T_m) \cong H_n(S^n)$, et $[z] = 0$ dans $H_n(T)$. Par construction, $\text{Im}(\chi) = \mathbb{Z}[1/2]$, le groupe des rationnels de dénominateur une puissance de 2. On conclut que $H_n(T) \cong \mathbb{Z}[1/2]$.

4. Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$. Considérons les deux espaces suivants. Pour chacun de ces espaces, déterminer son groupe fondamental, et construire un revêtement universel ou montrer qu'il n'en existe pas.

(a) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, où $X_n = \{(z_1, z_2, z_3, \dots) \mid z_i \in S^1,\ z_i = 1 \text{ pour } i > n\} \cong (S^1)^n$.
On donne à chaque X_n la topologie en tant que sous-espace de $\mathbb{C}^n$, et U est ouvert dans X si et seulement si $U \cap X_n$ est ouvert dans X_n pour tout n.

Soit $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$, l'espace de toutes les suites $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ de réels telles que $x_i = 0$ pour i assez grand. Soit $p : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow X$ l'application $p(x_1, x_2, \dots) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \dots)$. Notons $\mathbf{1} = (1, 1, \dots) \in X$, $\mathbf{0} = (0, 0, \dots) \in p^{-1}(\mathbf{1})$, et $\mathbb{Z}^\infty = p^{-1}(\mathbf{1})$. On va montrer que p est un revêtement.

Remarque: $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{Z}^\infty = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, avec la notation que j'ai vue sur plusieurs copies.

Soit $\mathbf{z}_0 = (z_{01}, z_{02}, \dots)$ un élément de X. Considérons l'espace

$$U = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots) \,\big|\, \Re(z_i^{-1} z_{0i}) > 0 \text{ pour tout } i\}.$$

Pour tout n, $U \cap X_n$ est ouvert dans $X_n = (S^1)^n$ — un produit d'ouverts dans S^1 — donc U est ouvert dans X. Soit $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots) \in p^{-1}(\mathbf{z}_0)$. Alors

$$p^{-1}(U) = \coprod_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^\infty} \mathbf{n} + V,$$

une réunion disjointe, où

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \,\big|\, |x_i - x_{0i}| < \tfrac{1}{4} \text{ pour tout } i\}.$$

Puisque V est ouvert dans $\mathbb{R}^\infty$ et s'envoie vers U par un homéomorphisme, on conclut que p est un revêtement. Puisque $\mathbb{R}^\infty$ est contractile, donc simplement connexe, p est un revêtement universel.

Par un théorème du cours, **(a)** $\pi_1(X)$ est isomorphe au groupe G de tous les homéomorphismes $\varphi : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ tels que $p \circ \varphi = p$; et **(b)** pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^\infty = p^{-1}(\mathbf{1})$ il existe exactement un élément $\varphi \in G$ tel que $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{n}$. On conclut que G est le groupe de toutes les translations par des éléments de $\mathbb{Z}^\infty$, et donc que $\pi_1(X) \cong G \cong \mathbb{Z}^\infty$.

(b) $Y = \{(z_1, z_2, z_3, \dots) \mid z_n \in S^1\} = \prod_{n=1}^{\infty} S^1$, avec la topologie d'un produit infini. Autrement dit, Y est muni de la topologie associée à la métrique

$$d\big((z_1, z_2, \dots), (z_1', z_2', \dots)\big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|z_n - z_n'\|^2}{n^2}\Big)^{1/2}.$$

Soit $r_n : Y \longrightarrow S^1$ la n-ième projection: $r_n(z_1, z_2, \dots) = z_n$. Y a la propriété que pour tout autre espace Z, une application $f : Z \longrightarrow Y$ est continue si et seulement si $r_n \circ f : Z \longrightarrow S^1$ est continue pour tout n. Par conséquent, un lacet $\phi : I \longrightarrow Y$ est équivalent à une suite $(\phi_1, \phi_2, \dots)$ de lacets dans S_1 ($\phi_i = r_i \circ \phi$), et $\phi \simeq \psi$ (rel ∂I) si et seulement si $\phi_i \simeq \psi_i$ (rel ∂I) pour tout i. On conclut que

$$\pi_1(Y) \cong \prod_{i=1}^{\infty} \pi_1(S^1) \cong \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}.$$

Par un théorème du cours, si Y possède un revêtement universel, alors il existe un voisinage V de $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$ tel que l'inclusion de V dans Y induit l'homomorphisme trival $\pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(Y)$. Pour tout V, il existe n tel que V contient $(1, 1, \dots, 1, z_{n+1}, \dots)$ pour tout $z_{n+1}, z_{n+2}, \dots$ dans S^1. Soit $\phi : I \longrightarrow V$ le lacet $\phi(t) = (1, \dots, 1, e^{2\pi i t}, 1, 1, \dots)$; alors $[\phi] \neq 1$ dans $\pi_1(Y)$, en contradiction avec l'hypothèse sur V. En conclusion, Y n'admet pas de revêtement universel, puisque Y n'est pas semi-localement simplement connexe.