FIMFA ENS Ulm Mardi 26 janvier 2010 Durée : 3 heures

Examen de topologie algébrique

Documents et calculatrices interdits

Les exercices sont indépendants.

Exercice I Soit X un CW-complexe fini. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons $h_i = \dim_{\mathbb{R}} H_i(X; \mathbb{R})$ son i-ème nombre de Betti réel, et c_i le nombre de ses cellules de dimension i.

(1) Si $C(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i\, t^i$ et $H(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i\, t^i$, montrer qu'il existe un polynôme $B(t)$ à coefficients positifs ou nuls tel que $C(t) - H(t) = (t+1)B(t)$.

(2) Montrer que $c_0 \geq h_0$, $c_1 - c_0 \geq h_1 - h_0$, et que plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_{k-i} \geq \sum_{i=0}^{k} (-1)^i h_{k-i} \,.$$

Exercice II (1) Soient $n, k \in \mathbb{N} - \{0\}$ et x un point fixé de la sphère $\mathbb{S}_n$. Pour $1 \leq i \leq k$, soit B_i une copie de la boule $\mathbb{B}_{n+1}$ et $f_i : \partial B_i \to \mathbb{S}_n$ une application continue de degré d_i. Si X est l'espace topologique recollement $\big(\coprod_{1 \leq i \leq k} B_i\big) \cup_{\coprod_{1 \leq i \leq k} f_i} \mathbb{S}_n$ des boules B_i sur la sphère $\mathbb{S}_n$ par les applications f_i, calculer $\pi_1(X, x)$ et $H_p(X; \mathbb{Z})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(2) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de CW-complexes connexes, où X_i est pointé en un sommet x_i. Soit $X = \bigvee_{i \in I} X_i = \big(\coprod_{i \in I} X_i\big)/(x_i \sim x_j)$ leur somme pointée. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$H_n(X; \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i; \mathbb{Z}) \,.$$

(3) a) Montrer que pour tout groupe abélien G de type fini et tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, il existe un espace topologique compact connexe par arcs X (noté $M(G, n)$ et appelé un *espace de Moore*) tel que, pour tout $p \in \mathbb{N} - \{0\}$,

$$H_p(X; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} G & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

b) Montrer que pour toute suite $(G_p)_{p \in \mathbb{N} - \{0\}}$ de groupes abéliens de type fini, il existe un espace topologique connexe par arcs X tel que $H_p(X; \mathbb{Z}) \simeq G_p$ pour tout $p \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Exercice III Notons $\mathbb{R}^3$ l'espace affine euclidien orienté usuel, de coordonnées (x, y, z) dans le repère usuel. Considérons les vissages v_x, v_y, v_z définis respectivement comme la composition de la translation de longueur $+2$ et de la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ le long de l'axe orienté des x, y, z. Notons Γ le sous-groupe du groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_x, v_y et v_z, et Γ' celui engendré par v_x^4, v_y^4 et v_z. Considérons les projections canoniques $\pi : \mathbb{R}^3 \to X = \Gamma\backslash\mathbb{R}^3$ et $\pi' : \mathbb{R}^3 \to X' = \Gamma'\backslash\mathbb{R}^3$ sur les espaces topologiques quotients X et X'.

(1) a) Montrer que tout élément de Γ' peut s'écrire ${v_x}^{4p}\ {v_y}^{4q}\ {v_z}^{r}$ avec $p, q, r \in \mathbb{Z}$.
b) Montrer que π' est un revêtement mais que π n'est pas un revêtement.

(2) Montrer que X' n'a pas le même type d'homotopie que le tore $\mathbb{T}^3$ de dimension 3, mais admet un revêtement fini qui est homéomorphe à $\mathbb{T}^3$. Quel est le plus petit nombre de feuillets d'un revêtement fini de X' qui est homéomorphe au tore $\mathbb{T}^3$?

(3) Montrer que X admet une structure de CW-complexe fini telle que si $\mathbb{R}^3$ est muni du pavage par les images du cube $[-1, +1]^3$ par les translations de vecteurs à coefficients entiers pairs, alors π est une application cellulaire.

(4) Calculer la caractéristique d'Euler $\chi(X)$ de X.

(5) Calculer le complexe des chaînes cellulaires de X. En déduire les groupes d'homologie singulière à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de X.

$\boxed{\text{Exercice IV}}$ Dans tout cet exercice, l'anneau des coefficients est $\mathbb{R}$. Soit X un espace topologique tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel réel $H_i(X)$ soit de dimension finie, nulle si i est assez grand. Soit $f : X \to X$ une application continue. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $t_k(f)$ la trace de l'application linéaire $f_* : H_k(X) \to H_k(X)$; appelons *indice de Lefschetz de* f le nombre réel (on peut montrer qu'il appartient à $\mathbb{Z}$)

$$L(f) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k\ t_k(f)\ .$$

(1) a) Calculer $L(\mathrm{id})$.
b) Si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si $X = \mathbb{S}_n$ et si f est de degré d, calculer $L(f)$.

(2) Montrer que si $g : X \to X$ est une application continue homotope à f, alors $L(f) = L(g)$.

(3) Soit Y le sous-espace topologique du plan euclidien réel usuel $\mathbb{C}$, réunion des deux cercles de centre l'origine et de rayons 1 et 3, et de la spirale $\{(2 + \tanh\theta)e^{i\theta}\ :\ \theta \in \mathbb{R}\}$.
a) Calculer $H_k(Y)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que Y est compact connexe, et qu'il existe un homéomorphisme sans point fixe $f : Y \to Y$ tel que $L(f) \neq 0$.

(4) Supposons dans cette question que X soit un CW-complexe fini et que f soit cellulaire. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons D_k l'espace vectoriel des k-chaînes cellulaires de X, et $t'_k(f)$ la trace de l'application linéaire $f_* : D_k \to D_k$.
a) Soit (α, β, γ) un morphisme d'une suite exacte courte d'espaces vectoriels réels de dimension finie dans elle-même

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \to & 0\ .
\end{array}$$

Montrer que $\mathrm{trace}(\beta) = \mathrm{trace}(\alpha) + \mathrm{trace}(\gamma)$.

b) Montrer que

$$L(f) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \, t'_k(f) \ .$$

c) Montrer que si $f(c) \cap c$ est vide pour toute cellule c de X, alors $L(f) = 0$.

(5) On admet que pour toute application continue f d'un CW-complexe Z dans lui-même, il existe une structure de CW-complexe Z' sur l'espace topologique Z, telle que l'identité de Z dans Z' soit cellulaire et telle que f soit homotope à une application cellulaire g de Z' dans Z' avec g pouvant être choisie arbitrairement proche de f.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, montrer que toute application continue f de $\mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{S}_n$, de degré différent du degré de l'antipodie $x \mapsto -x$, admet un point fixe.

b) Montrer que toute application continue f d'une surface compacte connexe orientable de genre $g \geq 2$ dans elle même, qui est homotope à l'identité, possède un point fixe.