FIMFA ENS Ulm Lundi 28 janvier 2008 Durée : 3 heures

Corrigé de l'examen d'Analyse I

(Avec les solutions des questions auxquelles vous avez échappé vu la contrainte de temps !)

Exercice I (1) Cette relation $\mathcal{R}$, que nous noterons $\mathcal{R}_X$ lorsque préciser l'espace X est nécessaire, est clairement symétrique et réflexive. Soient x, y, z dans X tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. Pour tout espace topologique séparé Y et pour toute application continue $f : X \to Y$, on a $f(x) = f(y)$ car $x \mathcal{R} y$ et $f(y) = f(z)$ car $y \mathcal{R} z$, donc $f(x) = f(z)$. Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(i) Si X est séparé, et si $x \neq y$, alors x n'est pas en relation avec y (car l'identité $f = \mathrm{id}$ de X dans l'espace topologique séparé $Y = X$ vérifie $f(x) \neq f(y)$). Donc $\mathcal{R}$ est réduite à la diagonale de $X \times X$, et π_X est une bijection continue, clairement ouverte (car $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$), donc π_X est un homéomorphisme. (Le résultat découle aussi du point suivant en prenant $g = \mathrm{id} : X \to Y = X$.)

(ii) Soient Z un espace topologique séparé et $g : X \to Z$ une application continue. Si $x \mathcal{R} y$, alors $g(x) = g(y)$, donc g passe au quotient en une application (continue par les propriétés du passage au quotient) $g_{\mathrm{sep}} : X_{\mathrm{sep}} \to Z$ telle que $g_{\mathrm{sep}} \circ \pi_X = g$. L'unicité découle de cette formule et de la surjectivité de π_X.

(iii) Montrons que X_{sep} est séparé. Soient $x', y' \in X_{\mathrm{sep}}$ deux points distincts. Soient $x, y \in X$ tels que $\pi_X(x) = x'$ et $\pi_X(y) = y'$. Comme $\pi_X(x) \neq \pi_X(y)$, par définition de $\mathcal{R}$, il existe un espace topologique séparé Y et une application continue $f : X \to Y$, telle que $f(x) \neq f(y)$. Alors les images réciproques par l'application continue $f_{\mathrm{sep}} : X_{\mathrm{sep}} \to Y$ de voisinages ouverts disjoints de $f(x)$ et $f(y)$ sont des voisinages ouverts disjoints de $\pi_X(x)$ et $\pi_X(y)$. Donc X_{sep} est séparé.

(iv) Si tout ouvert non vide de X est dense (on sait que c'est le cas si X est l'ensemble $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de Zariski), alors toute paire d'ouverts non vides de X est d'intersection non vide. Si X_{sep} contient au moins deux points, alors puisque X_{sep} est séparé, les préimages par π_X de deux voisinages ouverts disjoints de ces deux points seront des ouverts non vides disjoints de X, ce qui n'est pas possible. Donc X_{sep} est réduit à un point ou vide (ce dernier cas si et seulement si X est vide).

(v) Supposons que de tout recouvrement ouvert de X, on puisse extraire un sous-recouvrement fini. Nous venons de voir que X_{sep} est séparé. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X_{sep}. Alors par continuité et surjectivité de π_X, la famille $\big(\pi_X^{-1}(U_i)\big)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X. Si $\big(\pi_X^{-1}(U_j)\big)_{j \in J}$ en est un sous-recouvrement fini, alors $(U_j)_{j \in j}$ est un sous-recouvrement fini de $\mathcal{U}$, par surjectivité de π_X. Donc X_{sep} est compact.

(vi) Si X est connexe, alors X_{sep}, comme image d'un connexe par l'application continue π_X, l'est. Réciproquement, si X_{sep} est connexe, pour toute application continue f de X dans l'espace discret (donc séparé) $\{0, 1\}$, l'application f_{sep} continue de l'espace connexe X_{sep} dans $\{0, 1\}$ est constante, donc f est constante, ce qui montre que X est connexe.

(vii) Si X, X' sont des espaces topologiques, et si $h : X \to X'$ est une application continue, alors $\pi_{X'} \circ h : X \to X'_{\mathrm{sep}}$ est une application continue (par composition d'applications continues) à valeurs dans un espace séparé, donc par (ii) passe au quotient en une application (continue par les propriétés du passage au quotient) $h_{\mathrm{sep}} : X_{\mathrm{sep}} \to X'_{\mathrm{sep}}$ telle que $h_{\rm sep}\circ\pi_X = \pi_{X'}\circ h$, unique par surjectivité de π_X. De l'unicité, on déduit en particulier que si $f : X_{\rm sep} \to X_{\rm sep}$ est une application continue telle que $f\circ\pi_X = \pi_X$, alors f est l'identité de $X_{\rm sep}$.

(viii) Il est clair que $\mathrm{id}_{\rm sep} = \mathrm{id}$ et si $g : X' \to X''$ est continue, alors l'égalité $(g\circ f)_{\rm sep} = g_{\rm sep}\circ f_{\rm sep}$ découle de l'unicité et du fait que $g_{\rm sep}\circ f_{\rm sep}$ est continue et vérifie $g_{\rm sep}\circ f_{\rm sep}\circ\pi_X = g_{\rm sep}\circ\pi_{X'}\circ f = \pi_{X''}\circ g\circ f$

(ix) Puisqu'un produit d'espaces séparés est séparé, l'application produit

$$p = \prod_{i\in I}\pi_{X_i} : X = \prod_{i\in I} X_i \to X'_{\rm sep} = \prod_{i\in I}(X_i)_{\rm sep}\ ,$$

définie par $(x_i)_{i\in I} \mapsto \big(\pi_{X_i}(x_i)\big)_{i\in I}$, est une application continue, car pour tout $i\in I$, sa i-ème composante est $\pi_{X_i}\circ\mathrm{pr}_i$, où pr_i est la i-ème projection, donc est continue comme composition d'applications continues. De plus, p est à valeurs dans un espace séparé, donc par (ii) induit par passage au quotient une application continue $\varphi = p_{\rm sep}$ de $X_{\rm sep}$ dans $X'_{\rm sep}$, surjective car p l'est, telle que $p = \varphi\circ\pi_X$. Montrons qu'il existe une application continue $q : X'_{\rm sep} \to X_{\rm sep}$ telle que $q\circ p = \pi_X$.

Nous aurons alors $q\circ\varphi\circ\pi_X = \pi_X$, donc par unicité $q\circ\varphi = \mathrm{id}_{X_{\rm sep}}$. Ceci implique par l'unicité mentionnée en fin de (vii) que φ est injective, donc bijective, et que son inverse est q. Donc φ est l'homéomorphisme cherché.

Il s'agit de montrer que si $(x_i)_{i\in I}\ \mathcal{R}_X\ (y_i)_{i\in I}$, alors pour tout $i\in I$, nous avons $x_i\ \mathcal{R}_{X_i}\ y_i$. Il suffit donc de montrer, pour tout $i\in I$ et pour toute application continue $f_i : X_i \to Y_i$ à valeurs dans un espace séparé Y_i, que nous avons $f_i(x_i) = f_i(y_i)$. Notons Y l'espace topologique produit $\prod_{i\in I} Y_i$, qui est séparé comme produit d'espaces séparés, et $f : \prod_{i\in I} X_i \to Y$ l'application produit $\prod_{i\in I} f_i$, définie par $(z_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(z_i))_{i\in I}$. L'application f est continue, car chaque composante $f_i\circ\mathrm{pr}_i$ l'est. Donc $f((x_i)_{i\in I}) = f((y_i)_{i\in I})$, donc nous avons bien $f_i(x_i) = f_i(y_i)$ pour tout i dans I.

(2) (i) Notons $\mathcal{R}'$ la relation sur X définie par $x\,\mathcal{R}'\,y$ si et seulement si $d(x,y) = 0$. Cette relation est clairement réflexive car d est nulle sur la diagonale, symétrique car d l'est. Elle est transitive, par l'inégalité triangulaire : si $d(x,y) = 0$ et $d(y,z) = 0$, alors $0 \le d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) = 0$. Donc $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence. Notons Y l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}'$. Si $x\,\mathcal{R}'\,x'$ et $y\,\mathcal{R}'\,y'$, alors ce même argument d'inégalité triangulaire montre que $d(x,y) = d(x',y')$. L'application $d : X\times X \to \mathbb{R}$ passe donc au quotient en une application $\overline{d} : Y\times Y \to [0,+\infty[$, qui est maintenant une distance. Il est facile de vérifier que la topologie quotient sur $Y = X/\mathcal{R}'$ coïncide avec la topologie définie par cette distance, car les préimages des boules ouvertes de centre x et de rayon r pour la distance $\overline{d}$ sont exactement les boules ouvertes pour la pseudo-distance d de centre n'importe quel point de la préimage de x et de rayon r.

En particulier, Y est séparé. Si $p : X \to Y$ est la projection canonique, il existe donc une unique application continue $p_{\rm sep} : X_{\rm sep} \to Y$. Réciproquement, comme π_X est continue, et $X_{\rm sep}$ est séparé, si $d(x,y) = 0$, alors $\pi_X(x) = \pi_X(y)$ (sinon x et y auraient des voisinages ouverts disjoints, ce qui n'est pas possible si $d(x,y) = 0$). Donc π_X passe au quotient par $\mathcal{R}'$ en une application $g : Y \to X_{\rm sep}$, continue par les propriétés de passage au quotient. Il est immédiat que g et $p_{\rm sep}$ sont inverses l'une de l'autre. Donc $X_{\rm sep}$ et Y sont homéomorphes. Comme Y est métrisable, il en est de même de $X_{\rm sep}$.

(ii) Pour tous $x,y\in E$, posons $d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\min\{1, ||x-y||_n\}$, et rappelons que d est une pseudo-distance sur E, dont la topologie induite coïncide avec la topologie définie par la famille de semi-normes. La première assertion de (ii) découle alors de (i).

Si E est muni d'une semi-norme $||\cdot||$, de pseudo-distance associée $d(x,y)=||x-y||$, si $x,x',y,y'\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ (le corps valué de définition de E), si $x\,\mathcal{R}_E\,x'$ et $y\,\mathcal{R}_E\,y'$, alors $d(x,x')=0$ et $d(y,y')=0$, donc

$$0\leq d(x+\lambda y,x'+\lambda y')=||x+\lambda y-x'-\lambda y'-y||\leq||x-x'||+|\lambda|\,||y-y'||\leq 0\ .$$

Donc $x+\lambda y\,\mathcal{R}_E\,x'+\lambda y'$. La structure d'espace vectoriel passe donc au quotient en une structure d'espace vectoriel sur $E_{\rm sep}$, qui, par les propriétés de passage au quotient des applications continues, muni $E_{\rm sep}$ d'une structure d'espace vectoriel topologique telle que $\pi_E:E\to E_{\rm sep}$ soit un morphisme d'espaces vectoriels topologiques. L'unicité est immédiate.

(iii) Comme deux éléments f,g de $E=\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ coïncident presque partout si et seulement si $||f-g||_p=0$, le résultat (iii) découle de la définition de $\mathbb{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ et de l'assertion (ii).

(3) Puisque $\overline{H}$ contient H, la projection canonique $p_{\overline{H}}:G\to G/\overline{H}$ induit par passage au quotient une application continue et surjective $f:G/H\to G/\overline{H}$ telle que $f\circ p_H=p_{\overline{H}}$. Puisque $\overline{H}$ est fermé dans G, l'espace topologique quotient $G/\overline{H}$ est séparé (voir le corollaire **??**). L'application continue et surjective f induit par passage au quotient (voir (1)(ii)) une application continue surjective $\phi:(G/H)_{\rm sep}\to G/\overline{H}$ telle que $\phi\circ\pi_{G/H}\circ p_H=f$, donc $\phi\circ\pi_{G/H}=p_{\overline{H}}$. Montrons qu'il existe une application continue $q:G/\overline{H}\to(G/H)_{\rm sep}$ telle que $q\circ f=\pi_{G/H}$. Par l'argument d'unicité déjà employé en (1) (ix), ceci montrera que $q\circ\phi=\mathrm{id}$, donc que ϕ est un homéomorphisme.

Il suffit de montrer que si $xH\,\mathcal{R}_{G/H}\,yH$, alors $xy^{-1}\in\overline{H}$. Or l'application $f:G/H\to G/\overline{H}$ est continue à valeurs dans un espace séparé, donc $f(xH)=f(yH)$, ce qui est exactement dire que $xy^{-1}\in\overline{H}$.

(4) (i) L'adhérence de Γ_{xy} est un sous-groupe de $G=\mathrm{SO}(3)$, qui contient clairement toutes les rotations d'axe Ox et toutes les rotations d'axe Oy, car 1 et 2π sont rationnellement indépendants. Pour toute rotation r, montrons que r appartient à $\overline{\Gamma_{xy}}$ (ce qui montre que Γ_{xy} est dense dans $\mathrm{SO}(3)$).

Soit A l'axe (orienté) de rotation de r. Quitte à conjuguer par une rotation d'axe Oy, nous pouvons supposer que A est contenu dans le plan Oyz. Quitte à conjuguer par une rotation d'axe Ox, nous pouvons supposer que $A=Oy$, et le résultat en découle.

(ii) Soit U un ouvert non vide de $\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy}$, et $\pi:\mathrm{SO}(3)\to\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy}$ la projection canonique, qui est continue. Alors $V=\pi^{-1}(U)$ est un ouvert non vide de $\mathrm{SO}(3)$ invariant par Γ_{xy}. Si $x\in\mathrm{SO}(3)$, alors l'orbite de x par Γ_{xy} est dense (la multiplication à gauche par x est un homéomorphisme), donc rencontre V, donc $x\in V$. Donc $V=\mathrm{SO}(3)$, et $U=\pi(V)=\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy}$. Donc la topologie quotient de $\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy}$ n'a pour ouvert que $\emptyset$ et $\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy}$, c'est par définition la topologie grossière.

(iii) Par (3), les espaces topologiques $(\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy})_{\rm sep}$ et $(\mathrm{SO}(3)/\Gamma_x)_{\rm sep}$ sont homéomorphes à $\mathrm{SO}(3)/\overline{\Gamma_{xy}}$ et $\mathrm{SO}(3)/\overline{\Gamma_x}$, donc respectivement à un point par (ii), et à la sphère $\mathbb{S}_2$ de dimension 2, par le cours (voir l'exemple (4) précédant le théorème **??**).

L'espace topologique $X_{\rm sep}$ est appelé *l'espace topologique séparé (canoniquement) associé à X*. Les points (1) (ii),(vii), (viii) disent que l'association à tout espace topologique X de l'espace topologique séparé $X_{\rm sep}$ et à toute application continue $f:X\to Y$ de l'application continue $f_{\rm sep}:X_{\rm sep}\to Y_{\rm sep}$, et un foncteur (covariant) de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des espaces topologiques séparés. Le point (1) (ii) dit que X_{sep} est « le plus gros quotient » séparé de X.

$\boxed{\text{Exercice II}}$ Le but de cet exercice est de montrer, dans un exemple très simple, que la somme directe de deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace vectoriel topologique n'est pas forcément fermée.

(1) Commençons par une remarque générale (qui implique que A et B existent bien).

Lemme 0.1 *Si E est un espace vectoriel topologique, et A une partie de E, alors il existe un (et un seul) plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel fermé contenant A. C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels fermés contenant A, ainsi que l'adhérence du sous-espace-vectoriel engendré par A.*

Preuve. L'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés contenant A est clairement stable par intersection (quelconque). Donc son intersection est l'unique plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant A. Celui-ci contient bien sur l'adhérence du sous-espace-vectoriel engendré par A. Nous avons vu que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel (fermé). Le résultat en découle. $\square$

Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est complet, donc un espace de Hilbert, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(b_n/||b_n||)_{n\in\mathbb{N}}$) est une suite orthonormée, dont l'espace vectoriel engendré est dense dans A (respectivement B), donc est une base hilbertienne de A (respectivement B).

Si $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de carré sommable telles que $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i\, a_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i\, b_i/||b_i||$, alors

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (\alpha_i - \big(1+\frac{1}{(i+1)^2}\big)^{-1/2}\beta_i)\, e_{2i} - \sum_{i\in\mathbb{N}} \big(1+(i+1)^2\big)^{-1/2}\beta_i\, e_{2i+1} = 0\ .$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E, et par sommabilité des carrés de la suite de n-ème terme $\big(1+(\frac{n+1}{2})^2\big)^{-1/2}\beta_{\frac{n-1}{2}}$ si n est impair, et $\alpha_{\frac{n}{2}} - \big(1+\frac{1}{(\frac{n}{2}+1)^2}\big)^{-1/2}\beta_{\frac{n}{2}}$ si n est pair, il en découle (par unicité de l'écriture en base hilbertienne) que $\beta_i = 0$ pour tout i, et donc que $\alpha_i = 0$ pour tout i. Donc $A \cap B = \{0\}$.

(2) Posons $f : (x, y) \mapsto x+y$ et $x_n = (-a_n, b_n) \in A \times B$ (muni par exemple de la norme produit du maximum). Alors $||x_n|| \geq 1$ et $||f(x_n)|| = \frac{1}{n}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la bijection réciproque de $f : A \times B \to A + B$ n'est pas continue.

(3) L'espace vectoriel engendré par la réunion des bases hilbertiennes de A et B ci-dessus est égal à l'espace vectoriel engendré par la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc est dense dans E. Si $A + B$ est fermé, alors il est complet, donc l'application $(x, y) \mapsto x + y$ de $A \times B$ dans $A + B$ est une application linéaire bijective continue, entre deux espaces de Banach, donc est un homéomorphisme par le théorème de Banach (voir le corollaire **??**), ce qui contredit (2). On peut aussi trouver explicitement un élément de $\overline{A \times B} - A \times B$: l'élement

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n - a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}\, e_{2n+1}$$

de E existe, car $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable, mais il n'appartient pas à $A + B$. En effet, supposons que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ soient deux suites de carré sommable telles que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i\, a_i + \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i\, b_i/||b_i|| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}\, e_{2n+1}\ .$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne, par unicité de l'écriture en base hilbertienne, on devrait avoir alors $\alpha_i = \frac{\beta_i}{||b_i||}$ et $\frac{\beta_i}{(n+1)||b_i||} = \frac{1}{n+1}$ pour tout i, donc en particulier $\alpha_i = 1$ pour tout i, ce qui contredit le fait que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable.

$\boxed{\text{Problème}}$ (1) La forme linéaire $\ell : F + \mathbb{R}v \to \mathbb{R}$ définie par $y \mapsto \lambda$, où λ est l'unique réel tel qu'il existe $x \in F$ avec $y = x + \lambda v$, est continue. C'est immédiat si E est de dimension finie. Mais si l'on suppose seulement que F est fermé, alors soit $d = d(v, F)$, qui est strictement positif, car F est fermé, et $v \notin F$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, pour tout $x \in F$, nous avons $-\frac{x}{\lambda} \in F$, donc

$$||v + \frac{x}{\lambda}|| \geq d(v, F) = d\ ,$$

et donc $|\lambda| \leq \frac{1}{d}||\lambda v + x||$. Par conséquent, la forme linéaire ℓ est continue, de norme au plus $\frac{1}{d}$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue sur E prolongeant ℓ. Son noyau H, qui est un hyperplan fermé de E ne contenant pas $\mathbb{R}v$, donc suppplémentaire à $\mathbb{R}v$, contient alors $\ell^{-1}(0) = F$. L'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda v + x$ de $\mathbb{R} \times H$ dans E est continue, car E est un espace vectoriel topologique, et bijective, d'application réciproque $z \mapsto (\ell(y), y - \ell(y)v)$, qui est continue.

(2) (i) Puisque $f : V \to E$ est C^∞, l'application $y \mapsto df_y$ de V dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(F, E)$ est C^∞. L'inverse est une application C^∞ de $\mathcal{L}(F, E)$ dans $\mathcal{L}(E, F)$. Comme la fonction d'évaluation d'une application linéaire en un point est une application bilinéaire continue, donc C^∞, le fait que f^*X soit de classe C^∞ découle du théorème de dérivation des applications composées.

(ii) Pour tout z dans W, si $y = g(z)$, nous avons

$$\begin{aligned}(f \circ g)^*X(z) &= (d(f \circ g)_z)^{-1}\Big(X\big(f \circ g(z)\big)\Big) = (dg_z)^{-1} \circ (df_y)^{-1}\Big(X\big(f(y)\big)\Big) \\ &= (dg_z)^{-1}\Big(f^*X\big(g(z)\big)\Big) = g^*(f^*X)(z)\ .\end{aligned}$$

(iii) L'application $v : t \mapsto f \circ \varphi^t_{f^*X}(y)$ est bien définie sur l'intervalle ouvert contenant 0, qui est le domaine maximal de définition de la solution de l'équation différentielle $z' = f^*X(z)$ valant y en $t = 0$. De plus, par le théorème de dérivation des applications composées,

$$\begin{aligned}v'(t) &= df_{\varphi^t_{f^*X}(y)}\Big(\frac{d}{dt}\varphi^t_{f^*X}(y)\Big) = df_{\varphi^t_{f^*X}(y)}\Big(f^*X\big(\varphi^t_{f^*X}(y)\big)\Big) = X\Big(f\big(\varphi^t_{f^*X}(y)\big)\Big) \\ &= X\big(v(t)\big)\ .\end{aligned}$$

On montre que v est même la solution maximale de l'équation différentielle $z' = X(z)$ valant $f(y)$ à l'instant $t = 0$, en utilisant le fait que f soit un difféomorphisme local (par le théorème d'inversion locale), et la formule $f^*(g^*X) = X$, si $g = f^{-1}$, étant vraie localement, par (ii).

(3) (i) Soient H un hyperplan fermé supplémentaire à $\mathbb{R}X(a)$, et ℓ une forme linéaire continue sur E de noyau H telle que $\ell(X(a)) = 1$ (qui existent par la question (I)). Notons $f : (\mathbb{R} \times H) \to E$ l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda X(a) + x + a$, qui est un C^∞-difféomorphisme, car son inverse est $z \mapsto (\ell(z - a), z - \ell(z - a)X(a))$ dont les composantes sont affines,

donc C^∞. Notons que $f(0,0)=a$ et que $(df_{(0,0)})^{-1} = d(f^{-1})_{f(0,0)}$ est l'application linéaire $z \mapsto (\ell(z), z-\ell(z)X(a))$ Nous avons donc

$$f^*X(0,0) = (df_{(0,0)})^{-1}\Big(X\big(f(0,0)\big)\Big) = \big(\ell(X(a)), X(a)-\ell(X(a))X(a)\big) = (1,0)\ .$$

(ii) Notons que $\Phi_1(t,x) = \varphi_Y^t(0,x)$ est bien défini, et de classe C^∞ (car C^∞ en chaque variable) si $|t|$ et $||\,x\,||$ sont suffisamment petits. De plus,

$$\partial_1(\Phi_1)_{(0,0)} = \frac{d}{dt}_{|t=0}\varphi_Y^t(0,0) = Y(0,0) = (1,0)\ ,$$

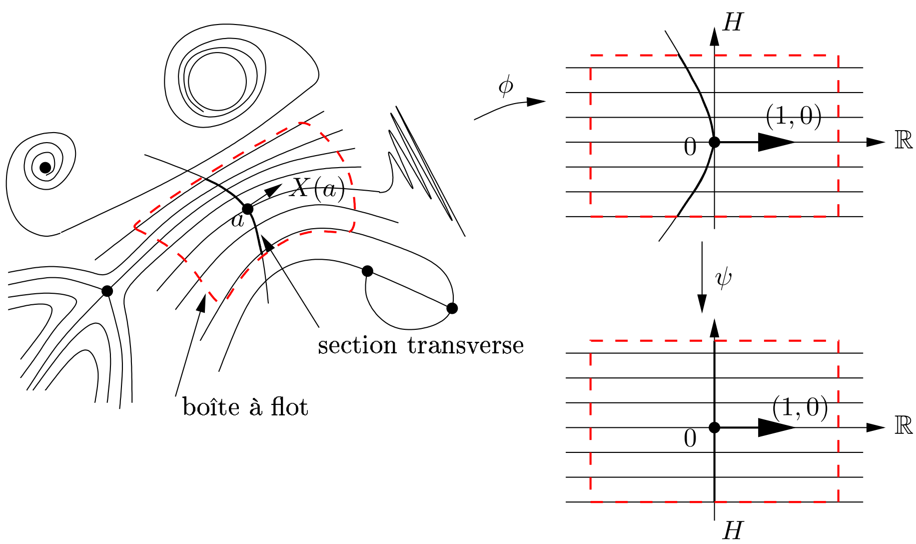
et, puisque $\varphi_Y^0(0,x) = (0,x)$,

$$\forall\, h\in H,\quad \partial_2(\Phi_1)_{(0,0)}(h) = (0,h)\ .$$

Donc $d(\Phi_1)_{(0,0)}$ est l'identité de $\mathbb{R}\times H$. Par le théorème d'inversion locale, il existe des voisinages ouverts W_1, W_1' de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}\times H$ tels que $\Phi_1 : W_1 \to W_1'$ soit un C^∞-difféomorphisme. De plus,

$$d(\Phi_1)_{(t,x)}(1,0) = \partial_1(\Phi_1)_{(t,x)} = \frac{d}{dt}\varphi_Y^t(0,x) = Y(\varphi_Y^t(0,x)) = Y(\Phi_1(t,x))\ ,$$

ce qui montre le résultat, en appliquant l'inverse de $d(\Phi_1)_{(t,x)}$ aux deux membres de cette équation.



(iii) Par l'assertion (ii) précédente, considérons un intervalle ouvert I_2' contenant 0, une boule ouverte W_2 de centre 0 dans $\mathcal{H}$, un voisinage ouvert W_2' de 0 dans E, et $\phi : W_2' \to I_2'\times W_2$ un C^∞-difféomorphisme tel que $\phi(a) = (0,0)$ et

$$(\phi^{-1})^* X = Z\ ,$$

où $Z : (W_2'\times I_2') \to (\mathbb{R}\times H)$ est l'application constante valant $(1,0)$. L'application $\phi\circ S : W \to \mathbb{R}\times H$ est de classe C^∞, c'est une immersion en 0 telle que $\phi\circ S(0) = (0,0)$ et l'image de $d(\phi\circ S)_0$ ne contienne pas $\mathbb{R}\times\{0\}$. Notons $\pi_1 : \mathbb{R}\times H \to \mathbb{R}$ et $\pi_2 : \mathbb{R}\times H \to H$

les projections sur le premier et le second facteur, qui sont linéaires continues, donc C^∞. L'application $\pi_2\circ\phi\circ S : W \to H$ est donc, par composition, une application C^∞ d'un ouvert de H dans H, qui est une immersion en 0 (car le noyau de π_2 est $\mathbb{R}\times\{0\}$, qui ne rencontre l'image de $d(\phi\circ S)_0$ qu'en $(0,0)$), d'image de 0 égale à 0. Puisque H est de dimension finie, l'application linéaire injective $d(\pi_2\circ\phi\circ S)_0 : H \to H$ est une bijection. Donc par le théorème d'inversion locale, quitte à restreindre W et W_2 (et donc W_2'), l'application $\pi_2\circ\phi\circ S : W \to W_2$ est un C^∞-difféomorphisme. Posons

$$f = (\pi_1\circ\phi\circ S)\circ(\pi_2\circ\phi\circ S)^{-1} : W_2 \to \mathbb{R}$$

qui est de classe C^∞, et $\psi : (I_2'\times W_2) \to (\mathbb{R}\times W_2)$ l'application définie par

$$(t,x) \mapsto (t - f(x), x)\ .$$

Alors, quitte à réduire I_2' et W_2 (et donc W, W_2'), il existe un intervalle ouvert I_2 contenant 0 tel que l'application $\psi : (I_2'\times W_2) \to (I_2\times W_2)$ soit un C^∞-difféomorphisme, d'inverse $(t,x)\mapsto(t+f(x),x)$. De plus, par construction, ψ envoie $\phi\circ S(W)$ sur $\{0\}\times W_2$.

Remarquons que $\big(\psi^{-1}\big)^*Z = Z$, car si $y=\psi(x)$, alors

$$\big(\psi^{-1}\big)^*Z(y) = \big(d(\psi^{-1})_y\big)^{-1}\big(Z(\psi^{-1}(y))\big) = d\psi_x(1,0) = \partial_1\Psi_x = (1,0)\ ,$$

puisque $\psi(t,0)=(t,0)$. En posant $\Phi_2 = \psi\circ\phi$, le résultat découle alors de (1) (ii).

(4) (i) Pour tout h dans E, nous avons

$$dL_a(h) = \lim_{t\to 0,\, t>0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} \geq 0\ ,$$

par passage à la limite des inégalités. Comme $-dL_a(h) = dL_a(-h)\geq 0$, on en déduit que $dL_a(h)=0$.

(ii) La partie V_s est un fermé (comme intersection de fermés) borné dans un espace vectoriel réel normé de dimension finie, donc est compact. Par continuité de L et puisque $L(a)<s$, la partie V_s, contenant l'ouvert $B(a,r)\cap L^{-1}(]-\infty,s[)$ contenant a, est un voisinage de a. Pour tout $\epsilon\in\,]0,r]$, l'application continue L, restreinte au compact $B - B(a,\epsilon)$, atteint son minimum m_ϵ, qui en particulier est strictement supérieur à $L(a)$. Si $s\in\,]L(a),m_\epsilon[$, alors $V_s\subset B(a,\epsilon)$. Donc tout voisinage de a contient un V_s.

(iii) Par continuité de L en restriction au compact $S(a,r)$, nous avons $m=\min_{x\in S(a,r)} > L(a)$. Soient $s\in\,]L(a),m[$ et x dans V_s. L'application $t\mapsto L\circ\varphi^t(x)$ (définie sur l'intervalle maximal $I=\,]\delta_-,\delta_+[$ contenant 0 tel que $L\circ\varphi^t(x)$ existe) est décroissante, car, par le théorème de dérivation des fonctions composées, sa dérivée à l'instant t est $dL_{\varphi^t(x)}\big(X(\varphi^t(x))\big)$, qui est négatif ou nul par hypothèse. Donc pour tout $t\in\,]0,\delta_+[$, nous avons $L\circ\varphi^t(x)\leq L\circ\varphi^0(x) = L(x) < s$. En particulier, $\varphi^t(x)$ appartient au compact V_s, sur laquelle l'application X est bornée et de différentielle bornée. De plus, V_s est un fermé contenu dans le domaine de définition de L et de l'équation différentielle $z'=X(z)$. Par la propriété d'explosion des solutions maximales d'une équation différentielle, nous avons donc $\delta_+=+\infty$ et $\varphi^t(x)\in V_s$ pour tout $t\geq 0$.

(iv) Soient $s\in\,]L(a),m[$ et x dans V_s. Par (iii), l'application $t\mapsto L(\varphi^t(x))$ est une application décroissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, minorée par $L(a)$, donc est convergente vers $\ell\in\mathbb{R}$ quand t tend vers $+\infty$.

Montrons par l'absurde que la seule valeur d'adhérence de $t \mapsto \varphi^t(x)$ quand t tends vers $+\infty$ est a. Par compacité de V_s, dans lequel reste la courbe $t \mapsto \varphi^t(x)$ par (iii), ceci concluera. Supposons donc qu'il existe $y \neq a$ dans V_s et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que la suite $\big(\varphi^{t_n}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. En particulier, $L(y) = \ell$. Pour tout $\tau > 0$, on a $L(\varphi^\tau(y)) < L(y)$, donc par continuité, $\ell = \lim_{k\to+\infty} L(\varphi^{\tau+t_k}(x)) < L(y) = \ell$, contradiction.

Terminologie des champs de vecteurs sur des ouverts d'espaces de Banach : Fixons $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Si $k = \infty, \omega$, notons $k - 1 = k$, et on étend l'ordre de $\mathbb{N}$ par $\omega \geq \infty \geq n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Une application X de classe C^k de E dans E est appelée un *champ de vecteurs sur U* de classe C^k. L'ensemble $\Xi_k(U) = \mathrm{C}^k(U, E)$ (aussi noté $\Xi(U)$ si $k = \infty$) des champs de vecteurs de classe C^k sur U, muni de l'addition point par point, et de la multiplication point par point par un réel, est un espace vectoriel réel. Muni de l'addition point par point, et de la multiplication point par point par un élément de l'anneau $\mathrm{C}^k(U, \mathbb{R})$, l'ensemble $\Xi_k(U)$ est un $\mathrm{C}^k(U, \mathbb{R})$-module. Si E est de dimension finie, et de base $(e_1, \dots, e_n)$, alors $\Xi_k(U)$ est un $\mathrm{C}^k(U, \mathbb{R})$-module libre, de base les champs de vecteurs constants valant $e_1, \dots, e_n$.

Si E, F sont des espaces de Banach, et U, V des ouverts de respectivement E et F, une application $f : U \to V$ de classe C^k est dite *étale* si $k \geq 1$ et si pour tout x dans U, l'application $df_x : E \to F$ est une bijection. Le théorème **??** d'inversion locale dit que les applications de classe C^k qui sont étales sont exactement les applications de classe C^k qui sont des C^k-difféomorphismes locaux.

Si $k \geq 1$, si $f : U \to V$ est une application C^k étale, et si $X \in \Xi(V)$, alors le champ de vecteurs f^*X de classe C^{k-1} défini par (II) (1) (i) est appelé *l'image réciproque* de X par f. De plus, l'application $f^* : X \mapsto f^*X$ de $\Xi_k(V)$ dans $\Xi_{k-1}(U)$ est clairement linéaire.

Le point (2) du problème montre les résultats suivants. Le premier est un résultat de forme normale d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point non singulier : modulo changement de coordonnée non linéaire local, on peut se ramener à un champ de vecteurs constant.

Théorème 0.2 *(***Théorème du redressement***) Soient $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, X un champ de vecteurs de classe C^k sur un ouvert U d'un espace de Banach E, et $a \in U$ tel que $X(a) \neq 0$. Alors il existe un C^k-difféomorphisme $f : V \to V'$, où V, V' sont des voisinages ouverts de a, tel que $f(a) = a$ et f^*X soit le champ de vecteurs constant $X(a)$ sur V.* □

Théorème 0.3 *(***Théorème des boîtes à flot***) Soient $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, X un champ de vecteurs C^k sur un ouvert U d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, a un point de U tel que $X(a) \neq 0$, H un hyperplan supplémentaire à $\mathbb{R}X(a)$, et $S : W \to E$, où W est un voisinage ouvert de 0 dans H, une application de classe C^k, qui est une immersion en 0 telle que $S(0) = a$ et $X(a)$ n'appartienne pas à l'image de dS_0. Alors il existe un intervalle ouvert I contenant 0, une boule ouverte V de centre 0 dans H, un voisinage ouvert V' de 0 dans E, et un C^∞-difféomorphisme $\Psi : I \times V \to V'$ tel que Ψ^*X soit le champ de vecteur constant valant $(1, 0)$, et que $\Psi\big((\{0\} \times H) \cap V\big) = S(W) \cap V'$.* □

L'image $\Psi(I \times V)$ de Ψ s'appelle une *boîte à flot* de X au voisinage de a, et $S(W) \cap V' = \Psi\big((\{0\} \times H) \cap V\big)$ une *transversale locale* de X en a dans cette boîte à flot.

Un point $a \in U$ tel que $X(a) = 0$ est appelé un *point d'équilibre* de X (ou un équilibre tout court, ou aussi un zéro du champ de vecteur X). Un point d'équilibre a est dit *stable* si tout voisinage V de a contient un voisinage W de a tel que pour tout x dans W et pour tout $t \in [0, +\infty[$, le point $\varphi^t(x)$ existe et appartient V. Un point d'équilibre a est dit *attractif* s'il existe un voisinage W de a dans E tel que pour tout x dans V,

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi^t(x) = a \ .$$

Une application L de classe C^1, d'un voisinage ouvert V d'un point d'équilibre a d'un champ de vecteurs X, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que a soit un minimum strict de L et $dL_x(X(x)) \leq 0$ pour tout x dans V (respectivement $dL_x(X(x)) < 0$ pour tout x dans $V - \{a\}$) est appelée une *application de Lyapounov* (respectivement *application de Lyapounov stricte*) pour le point d'équilibre a. Le résultat suivant (la régularité C^1 du champ de vecteurs suffit) est démontré dans la partie (3) du problème.

Théorème 0.4 *(***Théorème de Lyapounov***) Soit X un champ de vecteurs C^1 sur un ouvert d'un espace de Banach. Si un point d'équilibre a de X admet une application de Lyapounov (respectivement une application de Lyapounov stricte), alors a est stable (respectivement attractif).* □